



赫兹接触应力

——第23届亚洲物理奥林匹克竞赛实验第1题

翁雨燕¹ 宋峰²

(1. 苏州大学物理科学与技术学院 215006; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

第23届亚洲物理奥林匹克竞赛于2023年5月21日至29日在蒙古乌兰巴托举行。本届竞赛的实验考试时长为5小时,总分20分。第一题:赫兹接触应力(Hertzian Contact Stress),10分;第二题:源于表面热形变的干涉(Interference from thermally deformed surface(thermos-deformation)),10分。本文对第一题“赫兹接触应力”题目进行详细介绍,对课题背景、赛题分析、实验仪器、操作要点以及相关的前沿应用做必要的提示。

1. 课题背景

实验问题1通过赫兹接触理论,将经典力学、接触力学与实验技术结合,揭示了弹性体接触行为的物理本质。接触力学是本实验的核心理论框架,经典力学是本实验的动力学基础,材料科学是本实验参数的实际应用,现代实验技术下的高精度测量是本实验的技术保障,数据分析与拟合是本实验理论与实验的互验桥梁。而其应用场景可以从本实验赛题所述的宏观机械系统延伸至微观MEMS器件和生物医学工程,展现了力学理论在跨学科领域的基础性与实用性。未来,结合计算仿真与新材料研究,物理力学模型将进一步显示出其在智能制造、智能和柔性电子等前沿领域的核心基础地位。

赫兹接触模型由德国物理学家海因里希·赫兹(Heinrich Hertz)于1882年提出,是接触力学领域的奠基性理论。尽管其假设条件较为理想化,但因其简洁性、解析解的实用性和广泛适用性,赫兹模型在工程学、材料科学、生物力学等学科中占据核心地位。正如牛顿力学在现代物理中的地位,赫兹模

型在接触力学中既是经典,也是现代研究的起点。

2. 实验赛题

本次实验赛题旨在复现两弹性体接触时的应力分布,分析大角度摆、振动周期、双球碰撞行为、碰撞时间和赫兹变形参数。实验中需结合大角度摆和双球碰撞现象进行研究。

2.1 赫兹模型及其基本假设

赫兹模型的基本假设与几何简化主要体现为以下三方面。接触几何模型:假设两接触体为球体(或球体-平面),且接触区近似为圆形(赫兹接触半径为 a);材料行为前提:材料为线弹性体,满足胡克定律,且接触面无摩擦;小变形假设:接触半径 a 远小于球体的曲率半径 R ,形变量 δ 远小于 a 。

如果该模型各接触表面只有法向力,则表面在施加压强下的弹性形变总可以写为

$$u_z(x,y) = \frac{2\pi}{E'} \iint \frac{p(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx'dy' \quad (1)$$

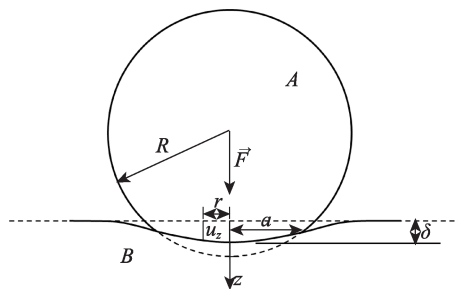


图1 半无限空间假设。 A (半径为 R)和 B (平面)在接触过程中,弹性形变为 u_z , r 是接触面任意点到轴线的距离, δ 为接触区中心的总弹性变形, a 是赫兹接触半径

式中, u_z 为弹性形变量, $\frac{1}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$ 是约化弹性模量, E_1, ν_1 和 E_2, ν_2 分别为 2 个接触体的杨氏模量和泊松比(根据弹性力学, 接触区中心的总弹性变形 δ 由两球体的接近量决定: $\delta = \frac{a^2}{R}$, 其中 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; 若一球体为平面, 则 $R_2 \rightarrow \infty, R = R_1$), $p(x, y)$ 是接触处的压强。可以看出, 如果压力分布是任意的, 则该方程无法获得解析解。将压力假设为抛物线分布,

$$\text{即} \quad p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (2)$$

其中 p_0 是最大赫兹压强。

即可获得赫兹形变量的解析解:

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E'a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (3)$$

2.2 实验装置

本实验赛题的装置如图 2 所示。赛题在清晰表述所有实验测量要求的同时, 也提供了示波器的使用说明, 帮助学生更好地理解电信号如何反演碰撞的微接触过程。

图 2 中的大部分装置, 学生在实验训练中都已经非常熟悉, 但是示波器可能因为型号的差别, 导致操作上的差异。因此, 赛题说明中详细解释了示波器的用法, 此处以 Siglent SDS 1152CML+ 为例进行介绍。

1. 基本设置: 连接探头, 将 BNC 接头(A)接入 CH1, 钩型探头(B)连接至 1kHz 方波测试引脚。自动校准, 按下 [Auto] 按钮, 示波器自动捕获波形(图 3a)。
2. 实验信号测量: 切换输入源, 移除钩型探头(B), 将其连接至实验电控接线盒的 CH1 引脚(图 3b)。

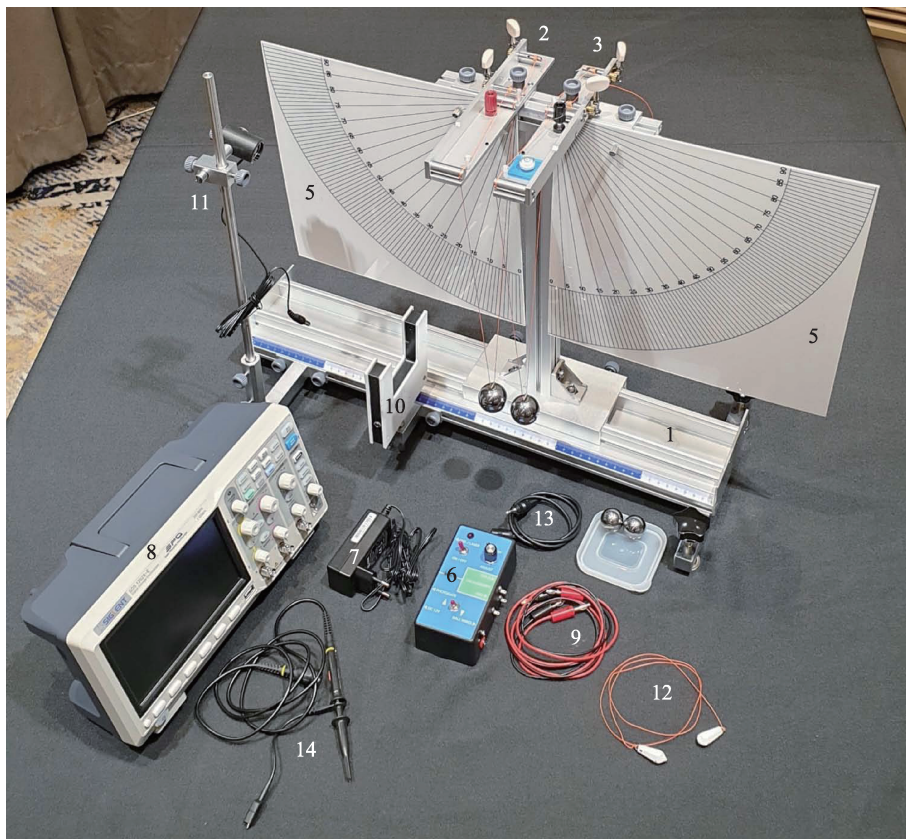


图 2 赫兹接触应力实验器材。1. 装置的基座平台, 2. 带有悬挂装置的摆 1(已悬挂大球), 3. 带有悬挂装置的摆 2(已悬挂大球), 4. 悬球(2 个尺寸), 5. 测量屏(2 个, 测量左右两侧的摆角), 6. 电控接线盒, 7. 电源适配器, 8. 示波器, 9. 连接线(测量碰撞接触), 10. 光电门, 11. 可调电磁球支架, 12. 细线(带铅锤), 13. 电缆(光电门 10 配套), 14. 测量探针(示波器 8 配套)

触发调整,使用Level旋钮,将触发标记(屏幕上方的白色T)对齐水平轴。触发条件检查,如图3c所示,按下触发菜单,检查实验条件。

3. 垂直/水平缩放:CH1电压调整至2V(Variable旋钮),时间基准设为250 ms(Zoom旋钮),如图3d所示。

4. 脉冲测量技巧:避免初始干扰,前两次脉冲可能受磁化或线张力影响,需使用第3~5次脉冲(图4a)。精确时间差测量,将目标脉冲移至屏幕中心(Horizontal Position旋钮)。缩小时间分度(如100 μ s)以放大脉冲。分别测量上升沿与下降沿的一半高度所对应的时间差,此半高宽即为脉冲宽度(图4b-c)。

赛题说明中还讲明了通用安全注意事项。1. 插拔电源前关闭设备:在插拔电源线之前,请确保设备已关闭,否则可能导致损坏。2. 勿随意更改示波器设置:除非题目中有明确指示,否则请勿更改示波器设置。3. 避免液体接触电器:请小心不要将饮

用水洒到附近的电子设备及电源插座上。4. 禁止随意拆卸装置:除非实验已完成,否则请勿拆卸实验装置,否则可能无法重新组装。5. 激光使用安全:激光辐射存在潜在危险,请注意激光束,请勿直视光束,避免眼睛直接接触激光。

2.3 赛题任务

A部分:大角度摆(1.4分)

A.1 测量 Δt^{-1} (顺次通过光电门时间的倒数)与 $\sin(\varphi_0/2)$ 的斜率。其操作流程可以体现为:使用示波器精确测量摆球通过光电门的时间差 Δt (根据赛题说明,要尽量避免使用第一个脉冲,尽量减少磁化与线张力对实验造成的影响)。改变初始角度 φ_0 (25°~30°),记录 φ_0 对应的 Δt 。绘制 $\Delta t^{-1} - \sin(\varphi_0/2)$ 的直线图,计算斜率。

A.2 推导摆球最大速度与初始角度的关系式。

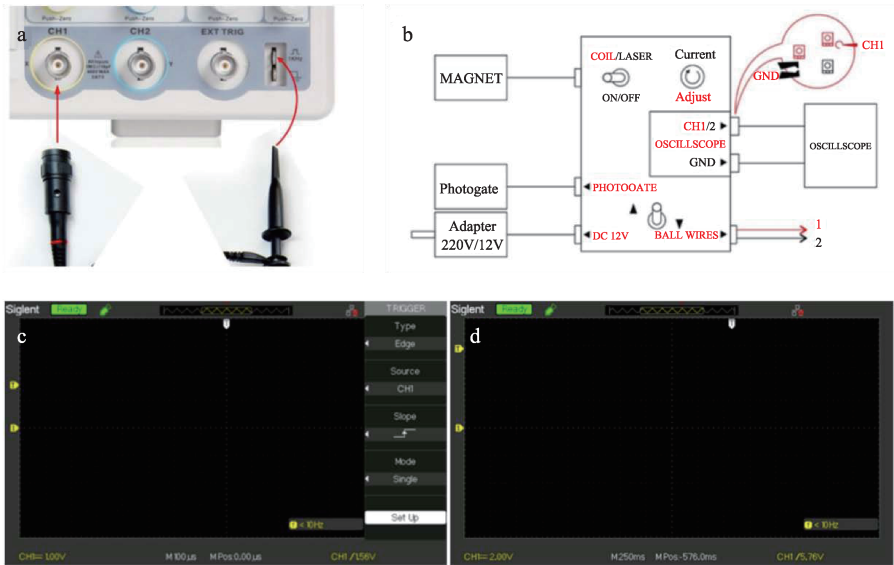


图3 示波器预调节

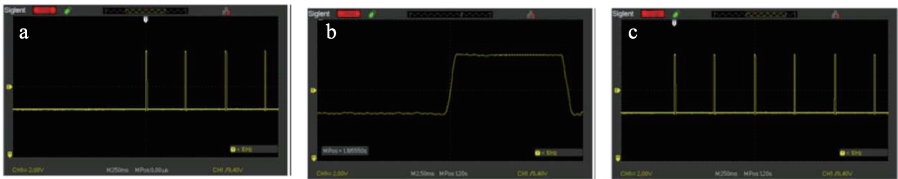


图4 脉冲测量技巧

根据摆球的最大速度与角度关系可通过能量守恒可推得: $v_{\max} = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)}$, 其中 l 为摆长, g 为当地重力加速度。

B. 振动周期(1.9分)

B.1 测量周期 T 随角度 φ_0 的变化, 绘制线性化图表, 并确定 T_0 、 α 、 β 。小角度时, $T \approx T_0$; 大角度时, 周期展开为 $T = T_0 \left(1 + \alpha \sin^2(\varphi_0/2) + \beta \sin^4(\varphi_0/2) + \dots \right)$ 。通过测量不同 φ_0 对应的 T , 分区域线性化 ($T - \sin^2(\varphi_0/2)$)。

B.2 利用 A.1 的斜率和 B.1 的 T_0 计算乌兰巴托的重力加速度 g 。根据 $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, 结合摆长 l (钢球直径 $d=31.75 \text{ mm}$) 求解 g 。

C. 碰撞行为(0.7分)

观测接触位置对 2 个大小相同球的碰撞行为的影响。观察 C.1~C.4 设置中描述的各个场景(对应图 5 中描述的 4 种情形)的碰撞行为(左侧球从 $25^\circ \sim 30^\circ$ 范围内某个角度自由释放), 请从图 6 中找到每个

场景唯一对应的左侧球中心 x 位置的时间依赖图。

C.1 2 个球悬挂于平衡位置, 高度错开 $1 \sim 2 \text{ mm}$ (图 5a)。(0.2分)

C.2 2 个球等高, 间隙 $1 \sim 2 \text{ mm}$ (图 5b)。(0.2分)

C.3 2 个球等高、无间隙, 两悬线不平行(图 5c)。(0.2分)

C.4 2 个球等高、无间隙, 两悬线平行(图 5d)。(0.1分)

C.1~C.4 观察不同接触位置(图 5a-d)对碰撞的影响, 并匹配时间依赖图(图 6a-e), 释放摆球并观察碰撞后运动。注意接触点偏移会导致动量传递方向变化, 影响碰撞信号波形(如单次/多次脉冲)。

D. 碰撞时间(3.0分)

碰撞过程的赫兹接触将持续一段时间, 之后两球分离, 将通过相同大小和不同大小的球的碰撞研究碰撞时间 τ 依赖于球的哪些参量, 并研究这些依赖关系。使用如图 7 所示的电路测量接触时间。摆球上的尼龙线仅用作振荡摆线, 有额外的细金属线连接到球上。(用牙签锁住金属线和尼龙线)

D.1 两球的碰撞时间 τ 满足如下方程: $\tau =$

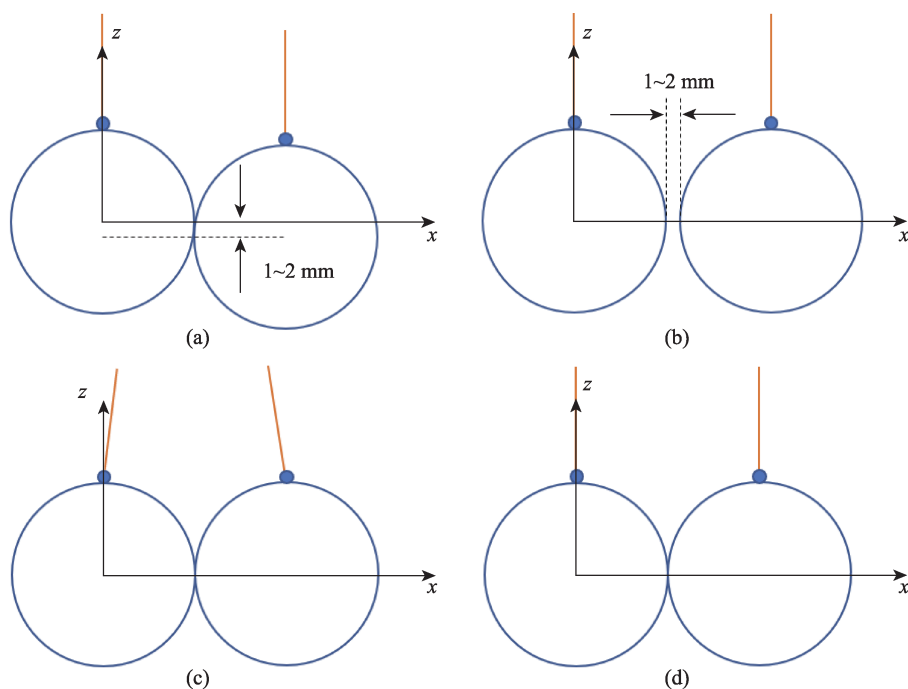


图5 4种不同接触位形

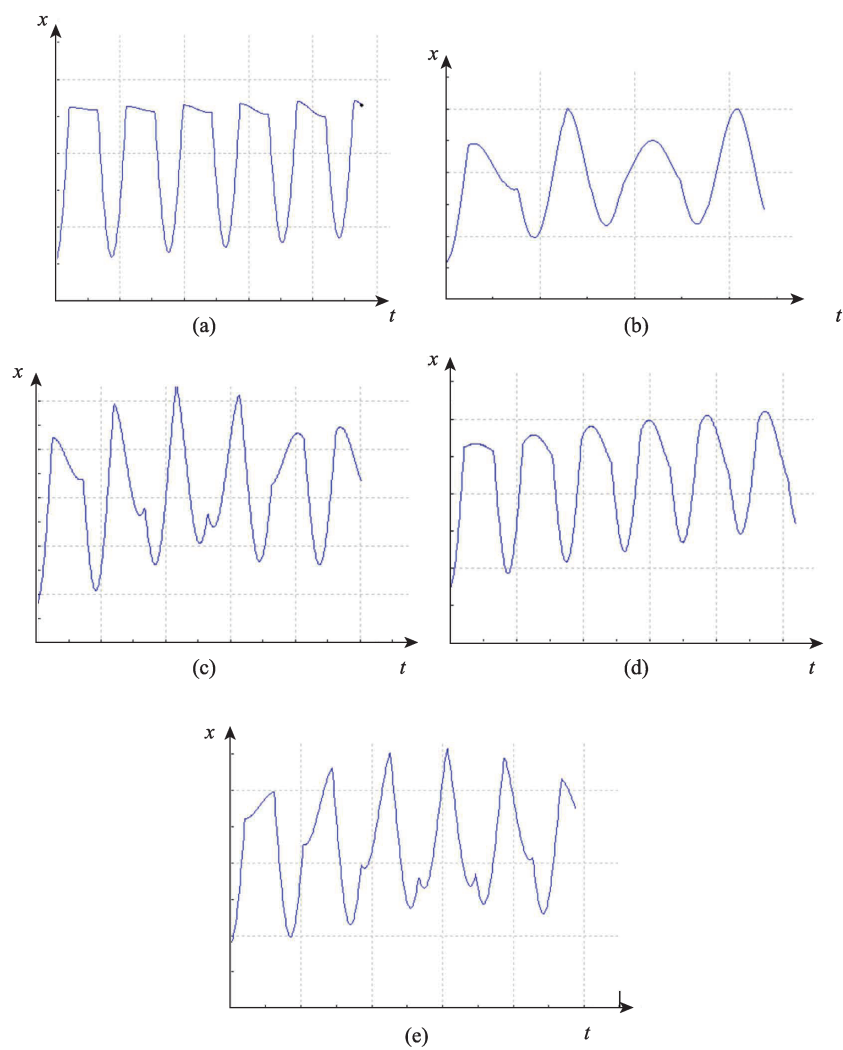


图6 左球中心位置的时间依赖图

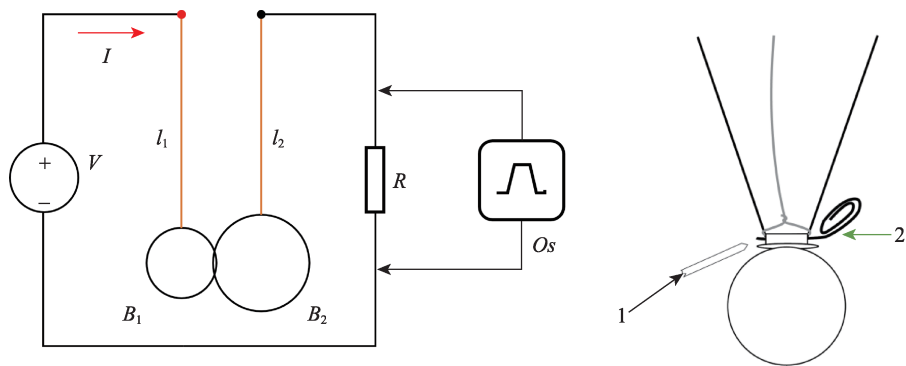


图7 接触时间测量电路与小球连线图
 B_1 和 B_2 为碰撞小球, O_s 为示波器. 1为牙签, 2为回形针

$A \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$. 其中 A 是无量纲常数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (n 为整数)是和碰撞相关的物理参量. 确定这些参量为哪些参量. 指数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 将在D.2和D.3部分确定. (0.4分)

D.2 通过实验,绘制适当的线性关系图,从而得到D.1中 τ 的表达式中某个或某些指数的值。(1.2分)

D.3 利用量纲分析和D.2中得到的指数值,求出其余指数的值。(0.4分)

D.4 求出 A 的高精度数值。(1.0分)

D.1~D.4 通过电接触法测量碰撞时间 τ ,分析其与物理参数(质量、速度、材料属性)的关系。赫兹接触时间公式可写为 $\tau \propto \left(\frac{m^{1/2}}{E^{2/5} R^{1/5} v^{1/5}} \right)$,并通过实验确定指数,并用量纲分析补全式子。

E. 赫兹形变参量(3.0分)

利用任务A.2中得到的最大速度公式和任务D.2中测得的实验数据,求出在一定初始摆角范围内的E.1~E.5中参量。 $(v = v_1 = v_2 = 0.3, E = E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa}, m_1 = 131.48 \text{ g}, m_2 = 67.55 \text{ g}, d_1 = 31.75 \text{ mm}, d_2 = 25.42 \text{ mm})$

E.1 导出平均力 F_{av} 的表达式,并计算出数值。(0.6分)

E.2 导出赫兹形变 δ 的表达式,并计算出数值。(0.6分)

E.3 导出赫兹半径 a 的表达式,并计算出数值(0.6分)

E.4 导出最大赫兹压强 p_0 的表达式,并计算出数值。(0.6分)

E.5 导出平均压强 p_{av} 的表达式,并计算出数值。(0.6分)

根据E.1~E.5计算平均力 F_{av} 、赫兹形变 δ 、赫兹半径 a 、最大赫兹压强 p_0 、平均压强 p_{av} 。结合实验数据,验证关系 $a = \left(\frac{3FR}{4E'} \right)^{1/3}, p_0 = \frac{3F}{2\pi a^2}$ 等。

3. 答题规范

答案需填写在指定答题纸(标记为A),草稿纸(标记为W)仅用于计算,无需评分。数据记录与图

表在简洁性、有效数字和错误分析方面的要求如下。简洁性,优先使用公式、逻辑符号或示意图,避免冗长描述。有效数字,根据测量精度保留合理位数(如示波器时间测量对应7位有效数字)。除非题目明确要求,否则无需计算误差。

安全与设备操作需要注意激光安全和设备使用安全。激光安全,禁止直视激光束,避免眼睛直接暴露(见G0-2页警告)。设备保护,插拔电源前关闭设备,勿擅自更改示波器设置(除非题目要求),保持实验台干燥,避免水溅到电子设备。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。

