



静电透镜

——2021年国际物理奥赛理论第二题参考解答

张宏根¹ 宋峰²

(1. 浙江省杭州学军中学 310020; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

A. 环轴上的静电势(1分)

此问的模型简单直接,通过直接计算的方式很容易求得。圆环的位形参数如图1所示。

A.1 (0.3分)

环的线电荷密度为 $\lambda = q/(2\pi R)$, 环上所有点距离A点的距离都为 $\sqrt{R^2 + z^2}$, 将环上所有线电荷微元在A处贡献的电势值作积分

$$\Phi(z) = \int d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (1)$$

A.2 (0.4分)

直接将电势对 z 的幂次进行展开,利用泰勒展开公式 $(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2$, 取 $\epsilon = -\frac{1}{2}$ 可以得到

$$\Phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}} \quad (2)$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)$$

A.3 (0.2分)

电子的静电势能为 $V(z) = -e\Phi(z)$, 加在电子上的力是电子势能的负梯度, 电子势能是电子电量 $-e$

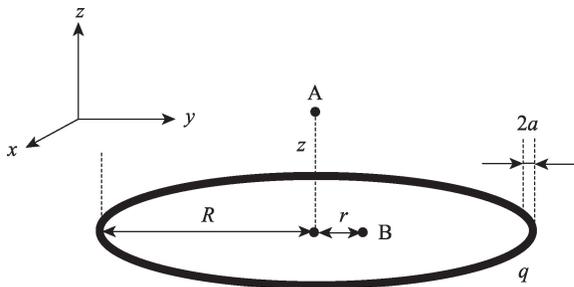


图1 一个半径为 R 的带电圆环

和电子所在处的电势值的积

$$F(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = +e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R^3} z. \quad (3)$$

如果这是一个恢复力, 它应当在 z 为正时为负, 因此 $q > 0$

A.4 (0.1分)

电子的运动方程为

$$m\ddot{z} + \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R^3} z = 0 \quad (4)$$

(坐标参数上的点代表对时间的导数), 我们因此得到了

$$\omega = \sqrt{\frac{qe}{4\pi m \epsilon_0 R^3}}. \quad (5)$$

B. 环面上的静电势(1.7分)

B.1 (1.5分)

可以使用两种不同的方法来解决本小问:(1)直接积分;(2)利用高斯定理和A部分的结果

(1)直接积分

参照图2, 因为势能具有柱对称性, 使B点位于 x 轴上, 有

$$|OB| = r; |OC| = R \quad (6)$$

根据余弦定理

$$|CB|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi \quad (7)$$

环上 $d\phi$ 微元在B处产生的电势为

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\phi}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \phi}}. \end{aligned} \quad (8)$$

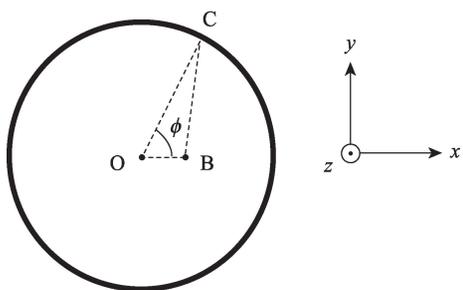


图2 以直接积分的方式计算环面上的静电势

利用泰勒展开公式 $(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2$, 取 $\epsilon = -\frac{1}{2}$ 可以得到

$$d\Phi \approx \frac{\lambda d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos\phi \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos\phi \right)^2 \right] \quad (9)$$

忽略 r^3 和 r^4 项, 保留到二阶项, 可以得到

$$d\Phi \approx \frac{\lambda d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \frac{r}{R} \cos\phi + \frac{r^2}{R^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2\phi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (10)$$

对所有的角度做积分, 得到

$$\Phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{r}{R} \cos\phi + \frac{r^2}{R^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2\phi - \frac{1}{2} \right) \right] d\phi \quad (11)$$

考虑到

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0; \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = \pi$$

所以, 最终得到

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) \quad (12)$$

将这个表达式和 $\Phi(r) = q(\alpha + \beta r^2)$ 作比较, 可以得到

$$\beta = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3} \quad (13)$$

(2) 高斯定理

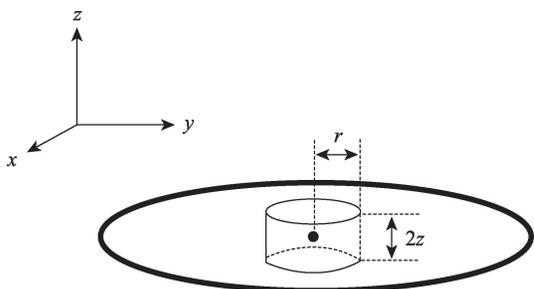


图3 利用高斯定理计算环面上的静电势

我们来分析半径为 r 的小圆柱, 圆柱的中心就是金属环的中心, 在A部分我们分析了 z 轴上的电势, 在这个部分分析沿着半径 r 的电势, 依据 z 方向和 r 方向的反射对称性, 对于任何的 $z \ll R$ 和 $r \ll R$, 电势展开到最低阶都是 z 和 r 的二次项, 而且不存在诸如 rz 的项(如果存在诸如 rz 的项, 这一项将在 r, z 任何一个坐标做反射后符号翻转):

$$\Phi(z, r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2} \right) + q\beta r^2 \quad (14)$$

由这个表达式, 立即可以得到

$$\alpha = 1/(4\pi\epsilon_0 R) \quad (15)$$

因此当 r 和 z 足够小时, 对电势求梯度, 可以得到轴向和径向的电场

$$\mathcal{E}_z(z, r) = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} z, \quad \mathcal{E}_r(z, r) = -2q\beta r \quad (16)$$

使用高斯定理, 只要闭合曲面包含的电荷量为零, 则电场对于这个闭合曲面的积分为零

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{\text{side}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17)$$

第二个积分为

$$\int_{\text{base}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 \mathcal{E}_z(z, r) = \frac{qzr^2}{2\epsilon_0 R^3} \quad (18)$$

第一个积分为

$$\int_{\text{side}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 4\pi r z \mathcal{E}_r(z, r) = -8\pi q\beta r^2 z \quad (19)$$

将两个积分(18)、(19)相加, 高斯定理给出

$$\frac{qzr^2}{2\epsilon_0 R^3} - 8\pi q\beta r^2 z = 0 \quad (20)$$

这立即就导出了

$$\beta = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3} \quad (21)$$

这和前面通过直接积分的方式得到的结果是一致的。

相较于直接积分, 高斯定理需要用到对称性分析, 但相应的其运算量也大大减少了。

B.2 (0.2分)

电子的势能可以写作 $V(r) = -e\Phi(r)$ 。在 xy 平面上加在电子上的力为势能的负梯度

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = +e \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{qe}{8\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (22)$$

为了得到一个振子,在 $r>0$ 处力应当与位移相反,因此 $q<0$ 。

C. 理想静电透镜的焦距: 瞬时充电 (2.3分)

在本问中我们需要采用近似方法去处理电子径向的运动,题中已经给出电子在 z 方向上运动速度不变,我们需要进一步假设电子穿越“活跃区域”的时间很短,以至于电子在受力期间径向坐标几乎不改变,类似于受到一个冲击力,这个近似对于较高速度运动的电子以及较弱的电场来说是合理的。因此无论电子以什么角度入射“活跃区域”,电子的速度改变都是一致的。

C.1 (1.3分)

考虑一个速度为 $v = \sqrt{2E/m}$,距离“光轴”(如图4) r 处的电子。电子在 $t = d/v$ 的时间间隔内经过透镜的“活跃区域”

r 方向的运动方程为

$$m\ddot{r} = 2eq\beta r \quad (23)$$

将这个运动方程两侧对时间积分,因为电子的径向坐标几乎不改变,加速度也为常值。在电子穿越“活跃区域”后,电子将会获得一个径向速度

$$v_r = \frac{2eq\beta r d}{m v} \quad (24)$$

如果 $q<0$,则径向速度指向光轴,透镜将会汇聚,电子到达“光轴”所需要的时间为

$$t' = \frac{r}{|v_r|} = -\frac{mv}{2eqd\beta} \quad (25)$$

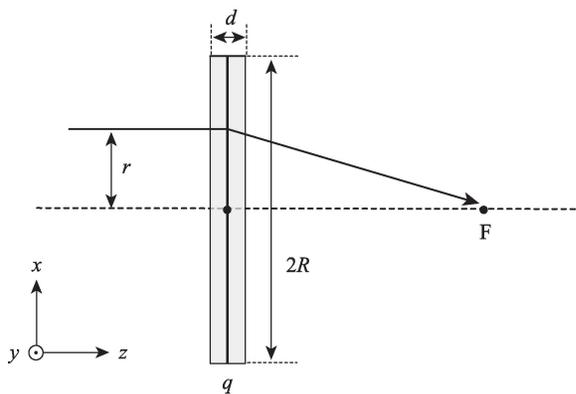


图4 静电透镜的一个模型

在这段时间中,电子将会在 z 方向走过一段距离

$$\Delta z = t'v = -\frac{mv^2}{2eqd\beta} = -\frac{E}{eqd\beta} \quad (26)$$

Δz 和径向距离 r 无关,因此所有的电子将会被聚焦在光轴上的同一点,因此

$$f = -\frac{E}{eqd\beta} \quad (27)$$

C.2 (0.8分)

考虑电子发射时与光轴成 γ 角(如图5)电子在径向的初始速度为

$$v_{r,0} = v \sin \gamma \approx v\gamma \approx \frac{vr}{b} \quad (28)$$

r 是电子在到达环面时的径向距离, z 方向电子的速度为

$$v_z = v \cos \gamma \approx v \quad (29)$$

对于小角 γ 电子在“活跃区域”内在 r 方向上获得的额外速度和C.1是相同的,因此在穿越“活跃区域”后电子的径向速度为

$$v_r = \frac{vr}{b} + \frac{2eq\beta r d}{m v} \quad (30)$$

$q<0$,因此其中第一项为正,第二项为负。如果电子被聚焦,则 $v_r<0$ 。电子到达光轴的时间为

$$t' = \frac{r}{|v_r|} = -\frac{r}{\frac{vr}{b} + \frac{2eq\beta r d}{m v}} = -\frac{1}{\frac{v}{b} + \frac{2eq\beta d}{m v}} \quad (31)$$

在这个时间段中电子走过的距离为

$$c = t'v = -\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2eq\beta d}{m v^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{eqd\beta}{E}} \quad (32)$$

C.3 (0.2分)

从此前的结论中我们可以得到

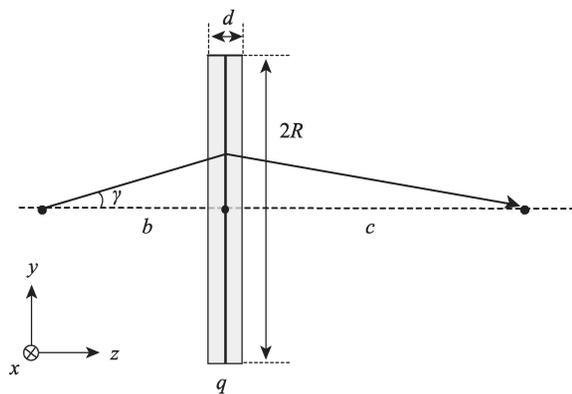


图5 电子的聚焦

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{eq\beta d}{E} \quad (33)$$

和C.1中的答案做比较我们立刻便得到

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f} \quad (34)$$

也就是说对于光学透镜有效的成像公式对于电磁透镜也有效。

D. 作为电容器的金属环(3分)

为了计算金属环的电容,我们需要计算出在金属环带有一定量的电荷 q 时金属环表面某点的电势 Φ (考虑到金属环表面各处都是等电势的),电容即为两者之商。

计算金属环的电势非常困难,有限远处有限的金属环的电势如果采用直接积分的方式计算会遇到无法积出解析结果的椭圆积分。对于题中所给的金属环它的厚度相较于半径较小,因此在一定的近似条件下这样的电势是可以被求出来的。在这一小问中如何近似是本道赛题最具技巧性的一部分,考虑题中给出的近似条件,在计算金属环上某一点的电势时,可以把金属环的其他部分划分为近邻部分与非近邻部分,近邻部分贡献可能出现发散的电势,因此不可忽略金属环的厚度,但是近邻部分的曲率可以忽略;非近邻部分可以忽略金属环的厚度,但是要考虑曲率的影响。总的电势是近邻部分与非近邻部分的和,在结果中我们会发现,薄圆环的电势与近邻非近邻的划分无关,这是一个好的具有技巧性的近似方法。

D.1 (2.0分)

将整个金属环分为两个部分:一个部分为场点K近邻部分的圆环,相对于圆心的张角为 $2\alpha \ll 1$;另一个部分为环的剩余部分,如图6中所示。尽管 a 和 1 相比很小,我们依然假设第一部分的长度 aR 和 a 相比依然很大($aR \gg a$),使得第一部分在处理过程中可以被看作一段长圆柱。点K的静电势 Φ 有两部分的贡献,第一个部分是张角为 2α 切出来的部分(Φ_1)另一部分贡献来自于剩余的金属环(Φ_2)

Φ_1 的计算:因为 $\alpha \ll 1$,我们可以忽略从环上被

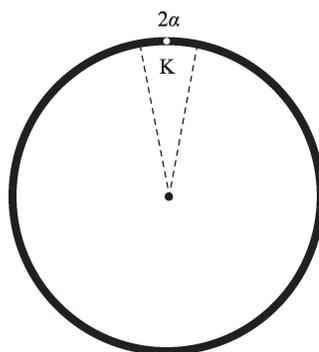


图6 金属环电容的计算

切下来的这部分圆柱的曲率。环的线电荷密度为 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ 。因此圆柱中心处的电势被这个积分所给出

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{aR} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{qx}{4\pi^2\epsilon_0 R} \\ &= \int_0^{aR} \frac{d(x/a)}{\sqrt{1+(x/a)^2}} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \int_0^{aR/a} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned} \quad (35)$$

使用题中注释所给出的积分公式我们得到

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \Big|_0^{aR/a} \\ &= \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(\frac{aR}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{aR}{a}\right)^2}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

当 $aR \gg a$ 时,有

$$\Phi_1 \approx \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R} \ln\left(\frac{2aR}{a}\right) \quad (37)$$

Φ_2 的计算:在这一部分圆环的尺寸较大,因此此处的计算我们忽略圆环的厚度 a 。使用余弦定理我们可以得到K点和L点(如图7)之间的距离为

$$|KL| = 2R \sin \frac{\phi}{2} \quad (38)$$

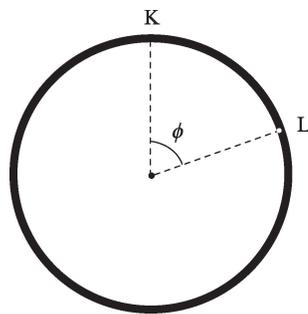


图7 金属环电容的计算

Φ_2 可以被写作如下积分

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 2 \frac{q}{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\pi \frac{d\phi}{2R \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0 R} \int_a^\pi \frac{d\phi}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ &= \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \int_a^\pi \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sin \frac{\phi}{2}} = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \int_{\alpha/2}^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sin \chi}. \end{aligned} \quad (39)$$

使用题中所给的积分公式,我们可以计算得到

$$\int_{\alpha/2}^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sin \chi} = -\ln\left(\frac{\cos \chi + 1}{\sin \chi}\right) \Bigg|_{\alpha/2}^{\pi/2} = \ln\left(\frac{\cos \alpha/2 + 1}{\sin \alpha/2}\right) \approx \ln\left(\frac{4}{\alpha}\right) \quad (40)$$

对于 $\alpha \ll 1$,有

$$\Phi_2 \approx \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln\left(\frac{4}{\alpha}\right). \quad (41)$$

总电势和电容的计算。总电势是两部分电势之和

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln\left(\frac{2\alpha R}{a}\right) + \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln\left(\frac{4}{\alpha}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln\left(\frac{8R}{a}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

在总电势的表达式中 α 被消去了,根据公式 $C=q/\Phi$,由式(42)得到

$$C = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R}{\ln\left(\frac{8R}{a}\right)}. \quad (43)$$

可见,当 $a \rightarrow 0$ 时, $C \rightarrow 0$

D.2 (1.0分)

求得金属环的电容之后,求解金属环充电的过程只需要求解一个简单的暂态过程即可。

$q(t)$ 为环上 t 时刻的电荷量,因此金属环的电势为 $q(t)/C$ 。在电阻上的电势降为

$$R_0 I(t) = R_0 dq/dt \quad (44)$$

因此在时间间隔 $-\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}$ 中,电容器处在充电状态,利用基尔霍夫定律,金属环上的电荷满足

$$\frac{q(t)}{C} + R_0 \frac{dq}{dt} = V_0. \quad (45)$$

求解该一阶微分方程,注意初值取为:

$t = -\frac{d}{2v}$ 时 $q(t) = 0$,可以得到

$$q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} e^{-\frac{t}{R_0C}} \right). \quad (46)$$

环上的电荷在 $t=d/(2v)$ 时达到绝对值的极大,此时的电荷量为

$$q_0 = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{vR_0C}} \right). \quad (47)$$

当 $t > \frac{d}{2v}$ 时,电容器处在放电状态,有

$$\frac{q(t)}{C} + R_0 \frac{dq}{dt} = 0. \quad (48)$$

由方程(48),解得

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{R_0C} + \frac{d}{2vR_0C}} = CV_0 \left(e^{\frac{d}{2vR_0C}} - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} \right) e^{-\frac{t}{R_0C}}. \quad (49)$$

因此我们得到

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < -\frac{d}{2v}; \\ CV_0 \left(1 - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} e^{-\frac{t}{R_0C}} \right) & \text{for } -\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}; \\ CV_0 \left(e^{\frac{d}{2vR_0C}} - e^{-\frac{d}{2vR_0C}} \right) e^{-\frac{t}{R_0C}} & \text{for } t > \frac{d}{2v}. \end{cases} \quad (50)$$

对于一个汇聚透镜其上电荷为负,因此要求 $V_0 < 0$,电荷对时间的依赖关系见图8。

E. 更加真实的透镜的焦距:非瞬时充电(2分)

E.1 (1.7分)

与C部分类似,电子径向的运动方程为

$$m\ddot{r} = 2eq(t)\beta r \quad (51)$$

此时电量 q 是时间的函数,引入参数 $\eta = 2e\beta/m$,我们得到

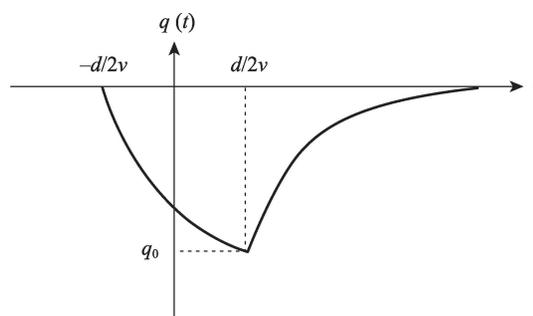


图8 环上电荷作为时间的函数

$$\ddot{r} - \eta q(t)r = 0 \quad (52)$$

因为 $\frac{f}{v} \gg R_0 C$, 所以在充放电的过程中, 电子径向位置的变化并不显著, 我们可以假设在充放电的过程中电子的径向位置 r 保持不变, 在这个假设下, 电子获得的径向速度为

$$v_r = \eta r \int_{-d/(2v)}^{\infty} q(t) dt. \quad (53)$$

我们可以用推导出来的 $q(t)$ 的方程求出这个积分。积分 $\int_{-d/(2v)}^{t_0/2} q(t) dt$ 为 (使用记号 $\frac{d}{v} = t_0, R_0 C = \tau, CV_0 = Q_0$)

$$\begin{aligned} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} q(t) dt &= \int_{-t_0/2}^{t_0/2} Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t_0}{2\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt \\ &= Q_0 \left(t_0 - \tau \left[1 - e^{-t_0/\tau} \right] \right). \end{aligned} \quad (54)$$

积分 $\int_{d/2v}^{\infty} q(t) dt$ 为

$$\int_{t_0/2}^{\infty} Q_0 \left(e^{\frac{t_0}{2\tau}} - e^{-\frac{t_0}{2\tau}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} dt = Q_0 \tau \left[1 - e^{-t_0/\tau} \right]. \quad (55)$$

将这两个积分相加, 得到最终结果

$$\int_{-t_0/2}^{\infty} q(t) dt = Q_0 t_0. \quad (56)$$

有趣的是, 这个结果并不依赖于 $\tau = R_0 C$ (57)

因此电子获得的径向速度为

$$v_r = \eta r \frac{CV_0 d}{v} = \frac{2e\beta CV_0 dr}{mv}. \quad (58)$$

和C部分类似, 我们可以推导出焦距为

$$f = -\frac{E}{eCV_0 d\beta}. \quad (59)$$

E.2 (0.3分)

对比上问的结果(59)式和C问的结果(27)式, 我们立刻得到

$$q_{\text{eff}} = CV_0 \quad (60)$$

本题所研究的静电透镜是电磁透镜的一种, 它们都以一种类似操纵光束的方式操纵电子束, 以达到聚焦增强电子束以及使电子束成像的目的。

电磁透镜的概念最初是由 Hans Busch 在 1986 年提出^①, 最初制造的电磁透镜由一个短螺线管线圈

圈缠绕而成, 在其空腔中心产生较高的磁场强度。在这一发现之后不久, Ruska 和 Knoll 发明了第一台电子显微镜^②, 使人们能够在远超光学显微镜的尺度上研究各种各样的结构。但是圆形电磁透镜的具有固有像差, 这个像差长期以来使得电子成像无法达到电子波长的分辨率。

在过去的几十年中, 电磁透镜技术进一步发展, 用非圆形多极电磁透镜堆栈进行像差校正技术在技术上才成为可能, 进一步提高了透射电子显微镜的分辨率。

近期, 有学者指出可以利用磁矢势的 Aharonov-Bohm 效应, 在一个没有经典电磁场的区域中利用磁矢量势, 改变电子束流的相位, 构造了一种新型电磁透镜^③这种新型透镜结合了传统电磁场和静电场透镜的优点, 为带电粒子系统的光学设计开辟了新的可能性。

电磁透镜被广泛地应用于电子显微镜内, 用于放大低能电子或离子的动量信号, 极大地开辟了分子显微镜的应用路径。一组研究者曾设计了能够将电子的速度图成像的信号放大 20 倍的静电透镜, 展现了其强大的性能^④。

注:

- ① H. Busch, Berechnung der bahn von kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen feld, Annalen der Physik 386, 974 (1926).
- ② E. Ruska, The development of the electron microscope and of electron microscopy (Nobel lecture), Angewandte Chemie International Edition in English 26, 595 (1987).
- ③ Makoto Tokoro Schreiber, Cathal Cassidy, Menour Saidani, Matthias Wolf, Electromagnetic lensing using the Aharonov-Bohm effect, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.09980>
- ④ H. L. Offerhaus, C. Nicole, F. Lépine, C. Bordas, F. Rosca-Pruna, and M. J. J. Vrakking, "A magnifying lens for velocity map imaging of electrons and ions," Rev. Sci. Instrum. 72(8), 3245-3248 (2001). <https://doi.org/10.1063/1.1386909>