



悬臂梁的弹性

——2021年亚洲物理奥林匹克竞赛实验第一题

张文理¹ 宋峰²

(1. 南京师范大学附属中学 210000; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

I. 介绍

悬臂梁是常见的机械结构之一(见图1),在结构设计中它被用作抗剪切弯曲的主要结构,同时在纳米工程领域也有广泛应用。分析纳米悬臂梁的弹性响应以及阐明应力和应变之间的关系在应用物理学中具有重要意义。然而,对纳米材料的机械性能进行直接测量是相当困难的,与宏观单轴拉伸测量不同,只能采用压痕测试方法。通过对纳米悬臂梁施加力,使用原子力显微镜或者纳米压痕仪观察纳米悬臂梁的弯曲变形,以推导出其杨氏模量,成为在微观尺度上测量材料力学性能的重要方法之一。

(a)



(b)

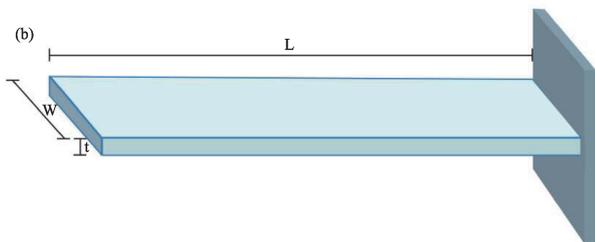


图1 (a)纳米悬臂梁的扫描电镜(SEM)图像;
(b)纳米悬臂梁示意图:长度 L 、宽度 w 、厚度 t

II. 设备介绍

1A

基本介绍

A. 返回到上一页

B. 激光开关

C. 激光器

D. 反射镜:可以通过点击旁边的箭头来精确控制该设备,也可以直接拖动鼠标左键进行移动。

E. 反射镜位置:坐标精确到 1×10^{-3} m,方位角精确到 0.1° 。

F. 位置敏感探测器(PSD)

G. 反射镜位置:坐标精确到 1×10^{-3} m,方位角精确到为 0.1° 。

H. PSD显示记录系统:可以通过点击旁边的箭头来精确控制该设备,也可以直接拖动鼠标左键进行移动。该系统在垂直和水平方向的边界均为 $\pm 1 \times 10^{-3}$ m。

I. PSD记录:开始记录的按钮。

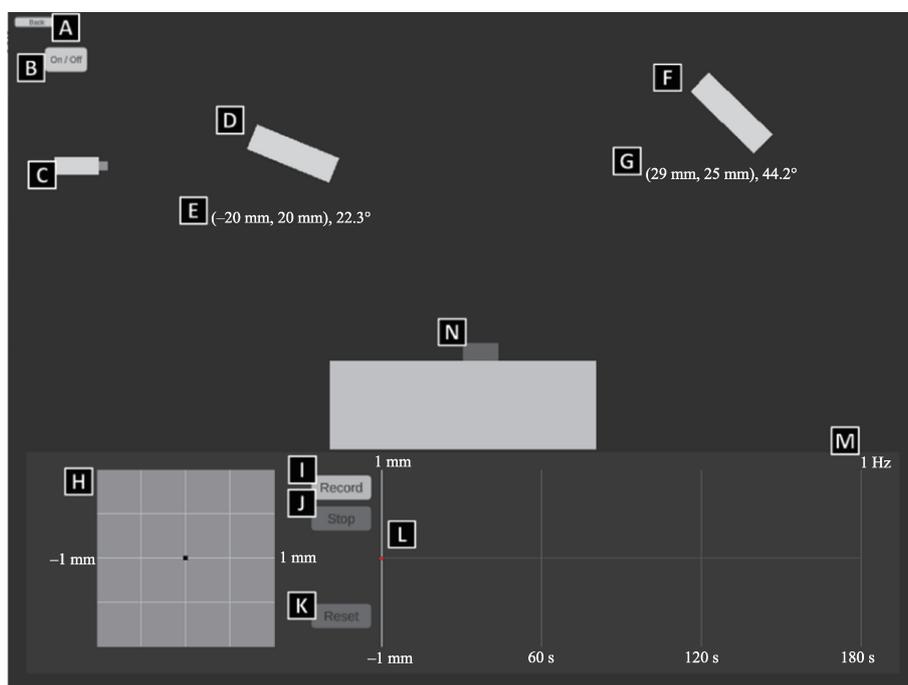
J. PSD记录:停止记录的按钮。

K. PSD记录:记录复位的按钮。

L. PSD记录历史:读数精确到 0.0001×10^{-3} m,可记录最长时间为180 s。可以在图表上用鼠标左键或单击键盘上的箭头键来查询数据。

M. PSD记录频率:1 Hz

N. 纳米梁载体:载体左上角位置坐标为(0,0),



纳米梁安装在载体的顶部左边缘。

1B

O. 点荷载控制器:可以通过拖动红色光标水平移动来控制力度。

P. 点荷载微控制器:用鼠标左键点击箭头按钮可以精确控制力度。

Q. 点荷载监测:精度达到 $0.01 \times 10^{-9} \text{ N}$ 。

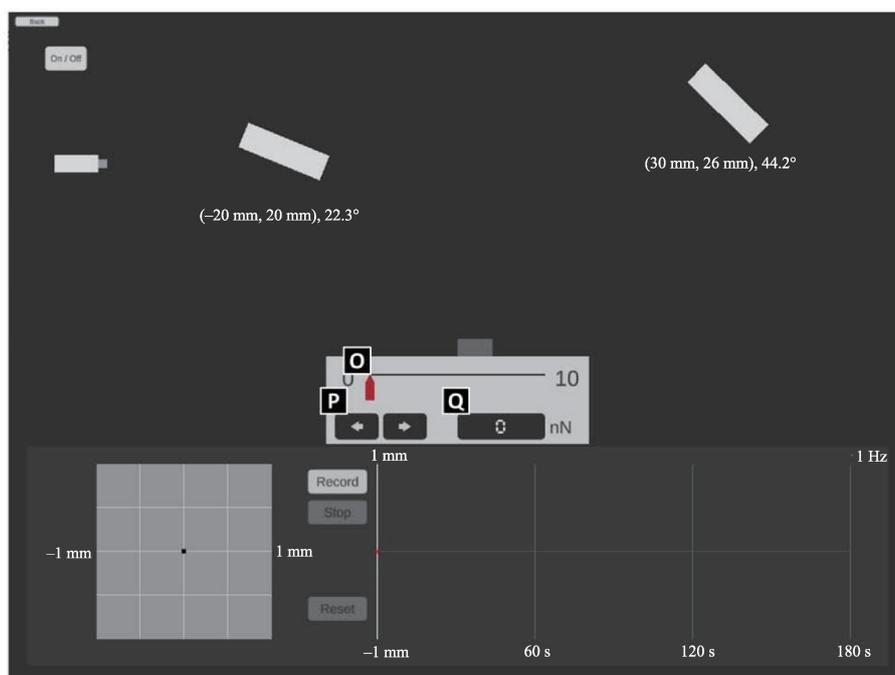
1C

R. 加热器电流监测:精度达到 $1 \times 10^{-3} \text{ A}$

S. 加热器温度监测:精度达到 0.1°C

T. 加热器电流减小按钮:每次点击减小 $2 \times 10^{-3} \text{ A}$

U. 加热器电流增加按钮:每次点击增加 $2 \times 10^{-3} \text{ A}$



V. 设置电流变化的按钮: 请注意, 加热或冷却样品的时间是参考真实实验的实际体验, 不能随意重置。也就是说, 如果样品因过大电流而过热, 那么样品冷却的时间将增加。

1D

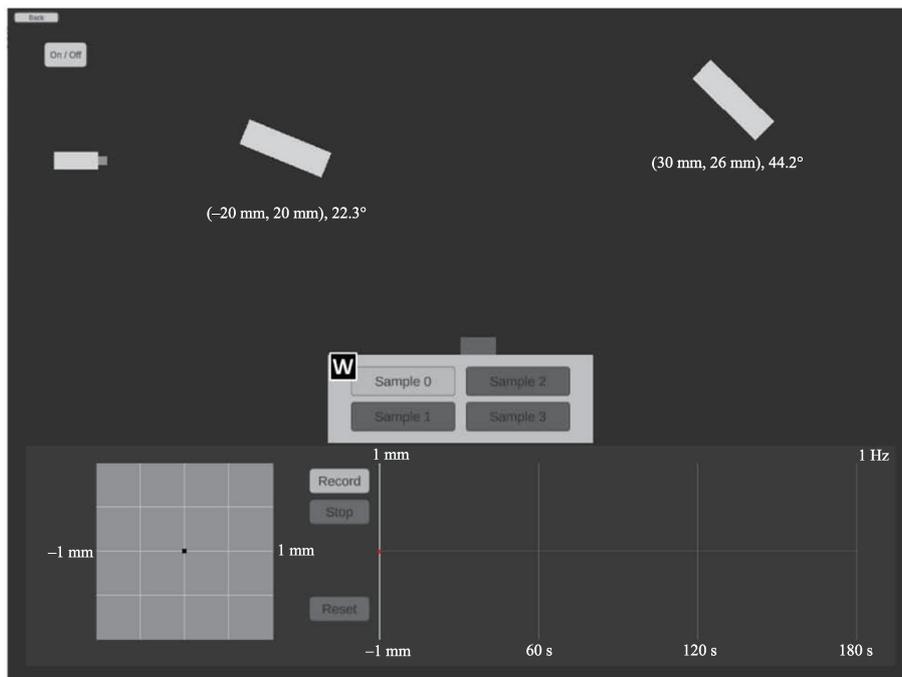
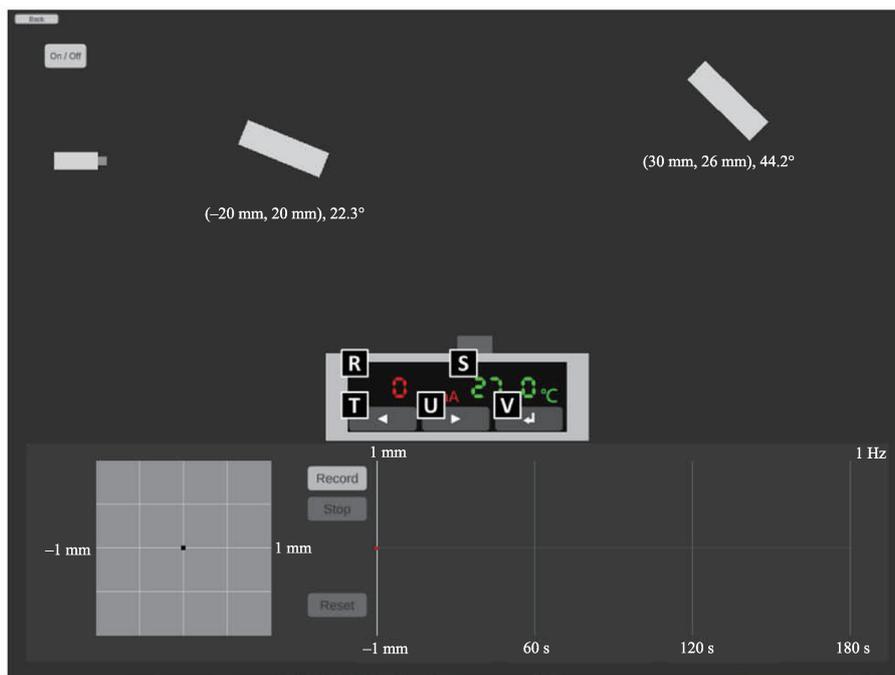
W. 样品转换: 用鼠标左键直接点击测试样品进

行切换。

III 实验

注意: 数据和答案必须以科学记数法和国际单位制表示。长度单位为米。

实验 A. 搭建光路(2.4 分)



在微观尺度上,使用光学显微镜直接测量纳米悬臂梁的形变是非常困难的,因此我们通过利用激光的准直性和反射性,并使用位置敏感探测器(PSD)进行测量。实验中使用的纳米悬臂梁长度 L 约为 $100 \times 10^{-6} \text{ m}$ 。

请运行程序 1A,并回答问题 A.1-A.3.

A.1 请设计一条光路,使激光点照射到悬臂梁反射区域的中间。确保激光点能够稳定地出现在 PSD 显示屏的原点附近,并在答题纸上绘制每个组件的相对位置(坐标和角度)。(0.6分)

A.2 由于设备打开时悬臂梁会受到干扰,因此可能需要一段时间才能达到稳定状态。开启设备后,程序界面右下角将显示光点在 PSD 上的位置图像和时间。按下“记录”按钮后,每 3 秒钟记录一次在环境扰动下光点在 PSD 上的位置 d 。请记录至少 40 个数据点,然后按下“停止”按钮,停止数据获取。(0.8分)

A.3 从 A.2 的结果中选择一部分相对稳定的数据,计算在本实验环境条件下悬臂梁的测量基准值。(1.0分)

注意:为了便于测量,我们假设在环境扰动的影响下,悬臂梁已经处于稳定状态,也就是说,光学元件的振动不会影响测量结果。

注意:数据和答案必须以科学记数法和国际单位制表示。长度单位为米。

注意:在实验 B 部分,不要求计算数据分析中的标准偏差。

实验 B.悬臂梁的形变和杨氏模量的推导(2.4分)

悬臂梁材料的杨氏模量可以通过在其自由端施加外力来获得,这可以通过使用原子力显微镜或纳米压痕仪来实现。通过对悬臂梁形变的测量,我们可以得到其杨氏模量。当向纳米悬臂梁施加力时,如果形变量不超过材料的弹性极限,则外力与其自由端形变之间的关系可以用下述公式表示:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

式中, F 是在端点处施加的力, E 是杨氏模量; I 是梁的截面惯性矩, L 是悬臂梁的长度, δ 是弯曲形

变。截面惯性矩 I 是反映物体在弯曲时其截面尺寸受到形变影响大小的物理量。截面惯性矩的值可以通过简单的积分计算得到。如图 2 所示,如果一个悬臂梁的截面高度为 t ,宽度为 w ,那么其截面惯性矩可以通过积分计算:

$$I = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} wt^3$$

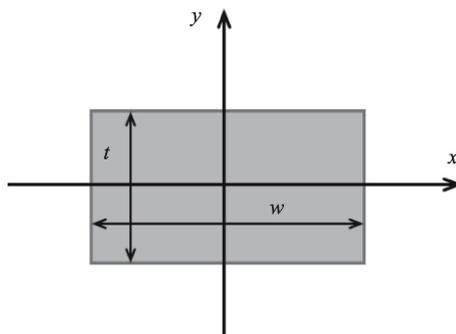


图2 悬臂梁横截面示意图

本实验所用的悬臂梁长度 L 为 $100 \times 10^{-6} \text{ m}$,宽度 w 为 $35 \times 10^{-6} \text{ m}$,高度 t 为 $0.20 \times 10^{-6} \text{ m}$ 。硅被用作基底材料,其标准杨氏模量 E 为 $280 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

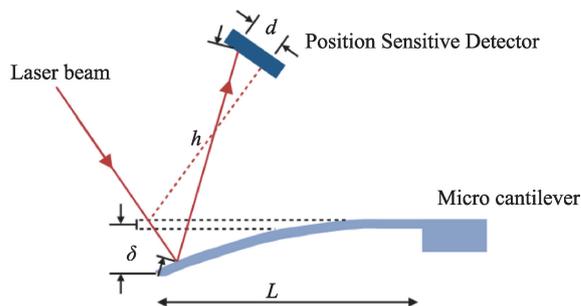


图3 光杠杆装置示意图

请运行程序 1B 并回答问题 B.1-B.3。

B.1 请设计外力为 0 N 时的光路,使激光点打在悬臂梁反射区域的中间,并确保激光点能够稳定地出现在 PSD 显示屏的中心附近。将数据记录在表格上以获得测量参考值 d_0 。此时 PSD 上光点的位置设置为位移 $\Delta d = 0$ 。然后在悬臂梁上施加 5 个不同大小的外力,并将实验结果记录在答题纸上的表格中。(1.0分)

B.2 填写表格。通过测量弯曲变形的大小绘制曲线,以弯曲形变 δ 作为 y 轴,PSD 上光点位移的平

均值 $\overline{\Delta d}$ 作为 x 轴。(1.0分)

B.3 请利用光杠杆关系式 $\delta = C_1 \overline{\Delta d}$ 推导 C_1 的值,如图3所示。(0.4分)

注意:为了便于测量,我们假设在环境扰动的影响下,悬臂梁已经达到稳定状态,即光学元件的振动不会影响测量值。

注意:数据和答案必须以科学记数法和国际单位制表示。长度单位为米。

注意:在实验C部分,不需要计算数据分析中的标准偏差。

实验C.双层悬臂梁(2.6分)

双层悬臂梁是一种常用于纳米工程的结构(如集成印刷电路板或纳米驱动器)。它由两层具有不同热膨胀系数的材料组成。根据铁木辛柯梁理论(Timoshenko beam theory),需要考虑两种材料弯曲刚度的差异。图4展示了一个由两层材料组成的双层悬臂梁,厚度分别为 t_1 和 t_2 ,热膨胀系数分别为 α_1 和 α_2 ,杨氏模量分别为 E_1 和 E_2 。

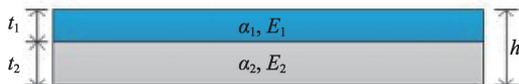


图4 由两层材料组成的双层悬臂梁示意图

根据悬臂梁理论,这两层材料的应力可以写成

$$\gamma_1 = \alpha_1 \Delta T + \frac{P_1}{wt_1 E_1} + \frac{t_1}{2r}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 \Delta T + \frac{P_2}{wt_2 E_2} + \frac{t_2}{2r}$$

其中, P_i 为净作用力, ΔT 为温度差, w 为宽度, r 为曲率半径。净作用力需要被抵消,如图4所示。合力矩 M 与净作用力 P_i 的关系为:

$$M = \sum_i P_i \frac{h}{2}$$

合力矩 M 可以表示为弯曲刚度 $E_i I_i$ 与曲率半径 r 的函数,如下所示:

$$M = \sum_i \frac{E_i I_i}{r}$$

其中, E_i 为杨氏模量, I_i 为转动惯量。边界条件要求应力连续,即 $\gamma_1 = \gamma_2$ 。在此边界条件下,可以得

到以下方程:

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(T - 300)}{\frac{2}{hw} \left(\frac{t_1 E_1 + t_2 E_2}{t_1 E_1 t_2 E_2} \right) (E_1 I_1 + E_2 I_2) + 0.5h}$$

$$\delta = \kappa L^2$$

双层梁结构如图5所示。实验参数如下: $L = 100 \times 10^{-6} \text{ m}$, $w = 35 \times 10^{-6} \text{ m}$, $t_2 = 0.2 \times 10^{-6} \text{ m}$, $t_1 = 0.04 \times 10^{-6} \text{ m}$ 。热胀系数 α_1, α_2 分别为 $14.2 \times 10^{-6} / \text{K}$ 和 $0.8 \times 10^{-6} / \text{K}$; 截面惯性矩 I_1, I_2 分别为 $1.867 \times 10^{-28} \text{ m}^4$ 和 $2.333 \times 10^{-26} \text{ m}^4$ 。下层为硅基底,其杨氏模量为 $280 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

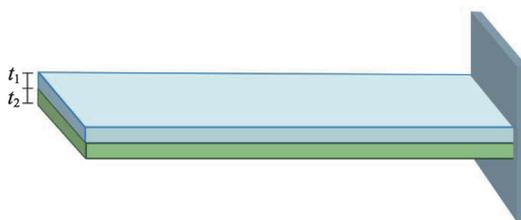


图5 双层悬臂梁(上层为金属X,下层为硅)

请运行程序C1并回答问题C.1-C.3。

C.1 请设计一个带光路的简单实验图,使得激光束照在梁的反射区域中间位置附近。记录室温数据,找到测量基准 d_0 ,并以此为基准对应 $\Delta d = 0$ 。然后,将温度升高到更高的值,等待双层梁稳定后再记录数据。至少测量5种不同温度的情况,并将数据记录在答题纸的表格中。(1.0分)

C.2 填写表格。通过测量弯曲变形的大小绘制曲线,以弯曲形变量 δ 作为 y 轴,温度 T 作为 x 轴。通过数据分析计算斜率。可以使用B.3中 δ 和 $\overline{\Delta d}$ 的关系式。(1.0分)

C.3 使用C.2中的数据计算上层材料的杨氏模量。(0.6分)

注意:为了便于测量,我们假设悬臂梁在环境扰动的影响下已经达到稳定状态,即光学元件的振动不会影响测量值。

注意:数据和答案必须以科学记数法和国际单位制表示。长度单位为米。

注意:在实验D部分,不需要计算数据分析中的标准偏差。

实验 D 测量悬臂梁因吸附分子引起的弯曲 (2.6 分)

复合悬臂梁不仅可以用作纳米驱动器,还可以用作纳米传感器。例如,图 6 展示了一个由双层悬臂梁组成的纳米蛋白质传感器,其表面融合有微流体通道,并涂敷蛋白质层。当不同的生物蛋白质被吸附到悬臂梁表面的时候,由于吸附分子之间的范德瓦尔斯相互作用力,使得蛋白质吸附作用在悬臂梁上产生表面应力以及可检测的弯曲形变。对于特定的蛋白质,这种应力的分布是唯一的。

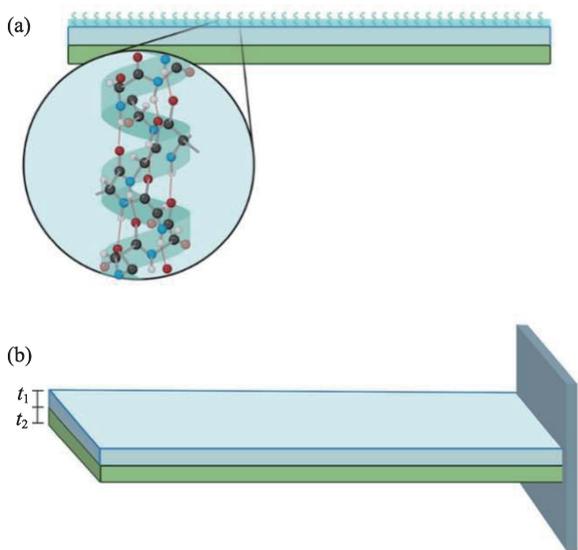


图 6 (a)一种用于纳米传感器的双层悬臂梁,上层涂有蛋白质层;(b)悬臂结构的示意图(未按比例绘制),其中上层由金属 X 制成,下层由硅制成

本实验中使用的双层悬臂梁的示意图如图 6(b) 所示。长度 L 约为 $100 \times 10^{-6} \text{ m}$, w 约为 $35 \times 10^{-6} \text{ m}$, t_2 约为 $0.2 \times 10^{-6} \text{ m}$, t_1 约为 $0.04 \times 10^{-6} \text{ m}$, 下层为硅基底。硅的杨氏模量是 $280 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。样品 0 和样品 1 的覆盖率(CR)分别 0 和 1%。可以忽略悬臂梁上涂层分子的厚度和杨氏模量的影响,因为涂层分子的量很少且覆盖率较低。假设有效弯曲刚度 $EI \approx 1.84 \times 10^{-13} \text{ Nm}^2$ 。

请运行程序 D1 并回答问题 D.1-D.4。

D.1 为样品 0 设计一条光路,使得反射激光点位于反射区域的中间,即激光点稳定出现在 PSD 屏幕的原点处。在答题纸表格中记录测量基准 d_0 , 设

定激光点的位移 Δd 为 0,即 $\Delta d=0$ 。然后用样品 1 重复实验。将你的答案记录在答题纸的表格中。请注意,在所有样本中样品 1 的覆盖率(CR)最高。(0.6 分)

D.2 假设弯曲形变量 δ 和覆盖率(CR)之间的函数形式可以表示为 $\delta = C_2 \frac{CR}{EI} L^4$ 。基于 D.1 中获得的数据,估算 C_2 的值。可以使用 B.3 中 δ 和 $\overline{\Delta d}$ 的关系式。(0.6 分)

D.3 使用样品 2 和样品 3,这两种样品吸附分子种类相同但覆盖率 CR 不同。分别测量激光点在 PSD 上的位移 Δd ,将数据记录在答题纸上。(0.8 分)

D.4 估算样品 2 和样品 3 的覆盖率 CR(以%表示)。(0.6 分)

【背景知识】

悬臂梁弹性测试是一种重要的材料机械性能评估手段,对于纳米尺度的材料尤其重要。直接测试纳米材料的机械参数,如杨氏模量和极限强度,是非常困难的,因为纳米结构太小,很难进行传统的单轴拉伸测试。然而,我们可以通过施加外力使纳米尺度的悬臂梁产生弯曲形变,并观察其变形来推断材料的参数。利用原子力显微镜可以精确施加并测量纳米级别的外力,为观察纳米悬臂梁的形变提供了一种有效的实验手段。通过测量悬臂梁的变形,我们可以根据弹性曲线理论计算出杨氏模量。这种方法避免了直接测量纳米结构在受力情况下的应变,而是通过观察悬臂梁的整体形变来推导材料的参数,因此更加可行。同时,这种方法可以在常温常压条件下进行,避免了其他方法中涉及的高温或真空条件,因此更适合测试生物材料等环境敏感的纳米结构。此外,悬臂梁测试可以同时提供杨氏模量在不同方向上的信息,可以评价材料的各向同性或各向异性,这也是其他测试方法难以实现的。总的来说,利用原子力显微镜测量纳米悬臂梁的形变可以成为评价纳米材料机械性能的一种简便有效的手段,在纳米尺度上具有独特的优势和意义。

将悬臂梁弹性测试等纳米科学前沿项目引入

中学生物理奥赛,对于培养理科人才具有深远影响和很高的潜在价值。这类试题可以激发中学生的科学兴趣和探索精神,培养他们的科学思维方式和实验技能,推动中学教育的进步。纳米科学与工程作为未来科技发展的前沿领域,具有极强的吸引力。这样的前沿题目可以让中学生直接面向科学前沿,体验科学探索的乐趣,激发他们对前沿科学和技术的兴趣与热情。本题详细考察了设计方案、理论分析、实验操作、结果解释等环节,全程锻炼了中学生的知识综合运用能力和独立思考能力。让中学生参与前沿科研,可以促使教师更新知识结

构,完善教学内容;也可以鼓励高中学校提供更高水平的仿真实验师资和条件,使更多的学生受益。这对于中学教育的发展和进步具有重要的推动和促进作用。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至 aosai@ihep.ac.cn 邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。



她用物理的情趣,引我们科苑揽胜; 她用知识的力量,助我们奋起攀登!

欢迎投稿,欢迎订阅

《现代物理知识》杂志隶属于中国物理学会,由中国科学院高能物理研究所主办,是我国物理学领域的中、高级科普性期刊。

科技创新、科学普及是实现创新发展的两翼。《现代物理知识》旨在普及科学知识、弘扬科学精神,设有物理知识、物理前沿、科技经纬、科学源流、教学参考、中学园地、科学书屋、科学正听和科苑快讯等栏目。诚邀在物理学及相关领域工作的科技、教育和科普等方面的专家学者,以公众喜闻乐见的文字,深入浅出、图文并茂地与读者分享现代物理知识、科学前沿成果和大科学装置进展等精彩故事,共襄“两翼齐飞”之盛举。投稿时请将稿件的Word文档发送至本刊电子信箱 mp@mail.ihep.ac.cn, 并将联系人姓名、详细地址、邮政编码,以及电话、电子信箱等联系方式附于文章末尾。

所投稿件一经本刊录用,作者须将该论文各种介质、媒体的版权转让给编辑部所有,并签署《现代物理知识》版权转让协议书(全部作者签名),如不接受此协议,请在投稿时予以声明。来稿一经发表,将一次性酌情付酬,以后不再支付其他报酬。

2023年《现代物理知识》每期定价15元,全年6期90元,欢迎新老读者订阅。

需要往期杂志的读者,请按下列价格付款:
2010~2021年单行本每期10元;2022年单行本每期15元;2010~2019年合订本每本60元。

订阅方式

- (1) 邮局订阅 邮发代号:2-824。
- (2) 编辑部订阅(请通过银行转账到以下账号,并在附言中说明“现代物理知识**年**期”)
名称:中国科学院高能物理研究所
开户行:工商银行北京永定路支行
账号:0200004909014451557
- (3) 科学出版社期刊发行部:联系电话 010-64017032 64017539;
- (4) 网上购买:搜淘宝店、微店店铺名称:中科期刊;淘宝购买链接:



淘宝网购刊



微信购刊