



土壤胶体系统研究 ——第53届国际物理奥赛理论第一题解答

解金月 宋 峰

(南开大学物理科学学院 300071)

本题以土壤胶体系统为背景,深入探讨了胶体粒子的微观运动机理,并将其应用至水净化。解答过程综合运用了动量定理、统计物理、扩散理论及受力分析,完整展现了从微观碰撞到宏观规律的物理图像。

A 部分胶体粒子的运动(1.6分)

本部分旨在建立外力冲击下胶体粒子的运动学模型。

A.1 (0.8分)

使用动量定理以处理瞬时冲击,冲量与动量变化的关系由 $Mv_0 = I_0$ 给出。因此在碰撞后瞬时初始速度为

$$v_0 = \frac{I_0}{M} \quad (1)$$

按照题目要求,在碰撞后仅有粘滞阻力控制胶体粒子的运动行为,代入其运动方程可得一阶线性常微分方程

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) \quad (2)$$

由上式可得: $\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{M}v$, 其中 $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$, 则

$$\text{左侧 } \frac{dv}{dt} = v_0 \cdot \frac{d}{dt} [e^{-(t-t_0)/\tau}] = -\frac{v_0}{\tau} \cdot e^{-(t-t_0)/\tau} = -\frac{v(t)}{\tau}, \text{进而可得}$$

$$\tau = \frac{M}{\gamma} \quad (3)$$

A.2 (0.8分)

实际情况下,胶体粒子处于水分子的无规则碰

撞之中,其运动情况是此类事件的总和叠加效果。由于运动方程是线性的,系统满足叠加原理,则基于式(2)用叠加原理求解。 $v(t)$ 即为 t 时刻前所有单次碰撞事件解之和,而碰撞产生的初始速度为 $\frac{I_i}{M}$,从碰撞时刻 t_i 到任意时刻 t ,速度衰减因子为 $e^{-(t-t_i)/\tau}$,那么

$$v(t) = \sum_i \frac{I_i}{M} e^{-(t-t_i)/\tau} \quad (4)$$

式中的求和范围需满足: $0 < t_i < t$

通过分析单次碰撞的影响以及碰撞间的速度变化,可以进一步理解此叠加原理。根据 A.1,第 i 次碰后瞬间速度为

$$v(t_i) = v_0(t_i) + \frac{I_i}{M} \quad (5)$$

其中 $v_0(t_i)$ 是碰撞前的速度。在 $t_i < t < t_{i+1}$ 无碰撞区间,则有

$$v(t) = \left(v_0(t_i) + \frac{I_i}{M} \right) e^{-(t-t_i)/\tau} \quad (6)$$

进而

$$v_0(t_{i+1}) = \left(v_0(t_i) + \frac{I_i}{M} \right) e^{-(t_{i+1}-t_i)/\tau} \quad (7)$$

当 $v_0(t_i) = 0$ 时则可以得到

$$v(t_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{I_j}{M} e^{-(t_i-t_j)/\tau} \quad (8)$$

而在 $t_i < t < t_{i+1}$ 范围内

$$v(t) = \sum_{j=1}^i \frac{I_j}{M} e^{-(t-t_j)/\tau} \quad (9)$$

该式和式(4)是等价的。

A 是本题的基础部分,读懂题目根据题意,结合动量定理与运动方程进行推导运算即可,在计算

A.1 部分时可利用指数函数导数的特性,将微分方程转化为代数方程,直接求解 τ 。而在A.2部分则要注意碰撞后速度的衰减情况。

B 部分有效运动方程(1.8分)

本部分是从微观到宏观的统计描述,在A部分的基础上,通过统计平均推导出粒子宏观扩散行为。

B.1 (1.0分)

我们由碰撞时刻延拓至时间步 δ ,将连续的随机过程离散化。根据模型定义,在 N 个时间步 δ 内的总位移为各步位移 $v_n\delta$ 之和

$$\Delta x(t) = \sum_{n=1}^N v_n \delta \quad (10)$$

已知各速度期望值为零, $\langle v_n \rangle = 0$

则总位移期望值亦为零

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0 \quad (11)$$

对于均方位移,需对式(10)平方后取平均值,即

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{n=1}^N v_n \delta \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N v_n v_m \delta^2 \right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \langle v_n v_m \rangle \delta^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$n \neq m$ 时, $\langle v_n v_m \rangle = 0$,仅存 $n = m$ 的项,则

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle v_n^2 \rangle \delta^2 = \sum_{n=1}^N C \delta^2 = NC \delta^2 \quad (13)$$

由于 $N\delta = t$,则

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta \cdot N \delta = C \delta t \quad (14)$$

B.2 (0.8分)

考虑到真正的物理过程是连续的,求解时需要保证时间步 $\delta \rightarrow 0$ 。均方位移 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 是布朗运动的特征观测量, t 给定时取有限值。题设中 $N = t/\delta$,本问中为使得 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 在极限情况 $\delta \rightarrow 0$ 时保持有限,则 $C\delta$ 应为有限值,因此 $C \propto \delta^{-1}$ 。进而均方位移可改写为

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto \delta^{-1} \cdot \delta \cdot t$$

则 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t$ 。由此可得:

$$\alpha = -1, \beta = 1。$$

注:本模型的连续时间极限 $\delta \rightarrow 0$ 对应于过阻尼朗之万方程。在无外力情况下,该方程为

$$\gamma \frac{dx}{dt} = \zeta(t) \quad (15)$$

其中 $\zeta(t)$ 满足

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = 2D\delta(t - t') \quad (16)$$

此处的 D 为扩散系数,注意区分 $\delta(t)$ 为狄拉克函数而非题目中的参数 δ 。对于 $t \neq 0$ 而且 $\delta(0) = \infty$ 满足 $\delta(t) = 0$;而当 $a < 0, b > 0$ 时, $\int_a^b \delta(t) dt = 1$ 。

B部分通过统计平均和取连续极限将微观的碰撞模型与宏观的扩散定律联系。其中B.1运用期望概念求解 $\langle \Delta x(t) \rangle$,进而求解 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$,利用随机变量的独立性,将双重求和简化为单重求和,可大幅减少计算量。B.2则基于前述结果进行推导,求解过程中注意连续极限下物理量有限的约束条件,逐步求得 α 与 β 的值。

C 部分电泳 (2.7分)

本部分研究外电场作用下带电胶体粒子的定向运动(电泳),揭示涨落与耗散之间的普适关系。

C.1 (0.5分)

对于速度 $v(>0)$ 的粒子,只有位置处于 $x_0 - v\delta \leq x \leq x_0$ 范围内才会在时间间隔 δ 内通过位置 x_0 。因速度正负各占一半,则粒子数密度为 $\frac{1}{2}n(x)$,因此, $N_+(x_0)$ 由下式给出

$$N_+(x_0) = \frac{1}{\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} \frac{1}{2} n(x) dx \quad (17)$$

代入泰勒展开 $n(x) \approx n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$,

得到:

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} [n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)] dx$$

上式等号右边第一项 $\int_{x_0 - v\delta}^{x_0} n(x_0) dx = n(x_0) \cdot$

$$v\delta, \text{第二项} \int_{x_0-v\delta}^{x_0} \left[(x-x_0) \frac{dn}{dx}(x_0) \right] dx = \frac{dn}{dx}(x_0) \cdot \left[\frac{(x-x_0)^2}{2} \right]_{x_0-v\delta}^{x_0} = \frac{dn}{dx}(x_0) \cdot \left(0 - \frac{(-v\delta)^2}{2} \right) = -\frac{v^2\delta^2}{2} \frac{dn}{dx}(x_0)$$

(x_0), 因此 $N_+(x_0)$ 可表示为

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \left[n(x_0) \cdot v\delta - \frac{v^2\delta^2}{2} \frac{dn}{dx}(x_0) \right] \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} n(x_0) v - \frac{1}{4} \frac{dn}{dx}(x_0) v^2 \delta$$

C.2 (0.7分)

$N_-(x_0)$ 的求解较为简单, 与 $N_+(x_0)$ 相似

$$N_-(x_0) = \frac{1}{2} n(x_0) v + \frac{1}{4} \frac{dn}{dx}(x_0) v^2 \delta \quad (19)$$

$$\text{结合式(18)} N_+(x_0) = \frac{1}{2} n(x_0) v - \frac{1}{4} \frac{dn}{dx}(x_0) v^2 \delta$$

以及 $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$ 可得

$$J_D(x_0) = -\frac{1}{2} \frac{dn}{dx}(x_0) \langle v^2 \rangle \delta = -\frac{1}{2} \frac{dn}{dx}(x_0) C \delta \quad (20)$$

与题目中对于 $x = x_0$ 的式(4): $J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x)$ 进行参数对照便知

$$D = \frac{1}{2} C \delta \quad (21)$$

将其代入 B.1 中的结果 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t$, 得到关于均方位移的另一种表达式

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt \quad (22)$$

C.3 (0.5分)

考虑在外电场的作用下, 电场力试图驱动带电胶体粒子聚集, 而由浓度梯度产生的渗透压则抵抗这种聚集。考虑厚度为 Δx 、截面为 A 的薄层粒子, 其受到的静电力与薄层两侧渗透压力差相等。左侧渗透压为 $\Pi(x)A$, 右侧渗透压为 $\Pi(x+\Delta x)A$, 在此范围内的电场力为 $n(x)A\Delta xQE$ 。考虑图 1(原题干中的图 2)中描述的力平衡可由以下方程表示

$$\Pi(x)A + n(x)A\Delta xQE = \Pi(x+\Delta x)A \quad (23)$$

渗透压方程 $\Pi(x) = n(x)kT$, 则 $\Pi(x+\Delta x) \approx$

$$\Pi(x) + kT \frac{dn}{dx} \Delta x, \text{整理后得}$$

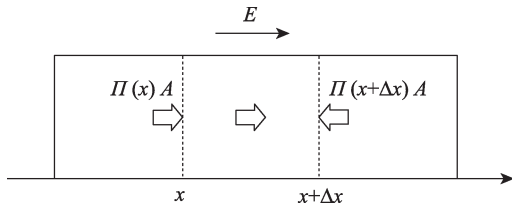


图 1 力平衡(见原题中图 2)

$$\frac{dn}{dx} = \frac{n(x)}{kT} QE \quad (24)$$

此式表明, 电场通过静电力拉拽粒子, 导致了浓度的空间分布不均匀。

C.4 (0.5分)

带电胶体粒子在电场中加速运动, 在粘滞阻力作用下, 运动状态趋于平衡, 达到一个稳定的漂移速度。此时需在 A 部分的粘滞阻力项之外增加静电力项, 则 $\langle v(t) \rangle$ 的运动方程为

$$M \frac{d\langle v(t) \rangle}{dt} = -\gamma \langle v(t) \rangle + QE \quad (25)$$

使用初始条件 $\langle v(0) \rangle = 0$ 进行求解, 可得

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (26)$$

因此

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \quad (27)$$

注: 学生应能推断式(25)与题目中给出的式(2)的形式相似。

C.5 (0.5分)

在电场作用下, 总粒子流密度包括扩散流和电泳流, 将 C.3 的结果 $\frac{dn}{dx} = \frac{n(x)}{kT} QE$ 代入 $J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}$ 有

$$J_D(x) = -\frac{DQE}{kT} n(x) \quad (28)$$

将 C.4 的结果 $u = \frac{QE}{\gamma}$ 代入题目中的式(5)

$$J_Q(x) = n(x)u \text{ 有}$$

$$J_Q(x) = \frac{QE}{\gamma} n(x) \quad (29)$$

在稳态分布时,净粒子流为零,即 $J_D(x) + J_Q(x) = 0$,将(28-29)式代入上述通量平衡方程可得

$$\frac{DQE}{kT}n(x) = \frac{QE}{\gamma}n(x) \Rightarrow D = \frac{kT}{\gamma} \quad (30)$$

上式即为著名的爱因斯坦关系,此式揭示了涨落(扩散)与耗散(粘滞)之间的深刻联系。

C.1 经过数学运算即可得到,注意解题时正负速度的例子各占一半。C.2 根据 $N_+(x_0)$ 得到 $N_-(x_0)$ 进而得到 $J_D(x_0)$,对照式(4)确定 D 后便可得到 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 。C.3 根据力平衡关系和渗透压方程求解,由浓度梯度引起的渗透压亦可反向推导以计算电场力。C.4 根据运动方程给出,C.5 则是在 C.3、C.4 的基础上进一步得到。本部分是该题目的理论核心,将涨落和耗散完美结合,是统计物理中一个极其深刻的结论。

D 部分均方位移 (2.4 分)

本部分应用前述理论实际测量阿伏伽德罗常数,并推广到更复杂的运动模式。

D.1 (1.0 分)

结合 C.2 的结果 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt$ 和 C.5 的结果 $D = \frac{kT}{\gamma}$,可得:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt = \frac{2kTt}{\gamma}$$

又知 $k = \frac{R}{N_A}$ 且 $\gamma = 6\pi a\eta$,可以得到以 N_A 表示的均方位移:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT\Delta t}{3\pi a\eta N_A} \quad (31)$$

根据题目中给出的数据,均方位移估计为 $6.34\mu\text{m}^2$,将其及题目中给出的参数值代入,可得到

$$N_A = 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (32)$$

注:1908年,让·巴蒂斯特·佩兰(1870-1942)通过实验观测得出分子 N_A 的估算值,该数值与当时其他研究方法获得的结果完全吻合,佩兰因在物质不连续结构领域的开创性研究,特别是关于沉降平衡

现象的发现,1926年荣获诺贝尔物理学奖。

D.2 (0.8 分)

使用 $\Delta x(t) = \sum_{n=1}^N (u + v_n)\delta$ 以及题目中式(3)可

以得到:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \sum_{n=1}^N (u + v_n)\delta = u \sum_{n=1}^N \delta + \sum_{n=1}^N v_n \delta \\ &= ut + \sum_{n=1}^N v_n \delta \end{aligned}$$

则均方位移为

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle &= \left\langle \left(ut + \sum_{n=1}^N v_n \delta \right)^2 \right\rangle \\ &= (ut)^2 + 2ut\delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle + \left\langle \left(\sum_{n=1}^N v_n \delta \right)^2 \right\rangle \quad (33) \\ &= (ut)^2 + 2Dt \end{aligned}$$

即

$$\langle \Delta x^2 \rangle = u^2 t \left(t + \frac{2D}{u^2} \right) = u^2 t (t + t_*) \quad (34)$$

其中 $t_* = \frac{2D}{u^2}$ 。在短时间 $t \ll t_*$ 时,扩散项由 $2Dt$ 主导, $MSD \propto t$;而在长时间 $t \gg t_*$ 时,则由定向项 $(ut)^2$ 主导,因此

$$\langle \Delta x^2 \rangle \propto \begin{cases} t (t \ll t_*) \\ t^2 (t \gg t_*) \end{cases} \quad (35)$$

t_* 位置可如图2表示,示意图应为在双对数坐标下,曲线从小斜率过渡到大斜率。前者由扩散项主导,后者由定向项主导。

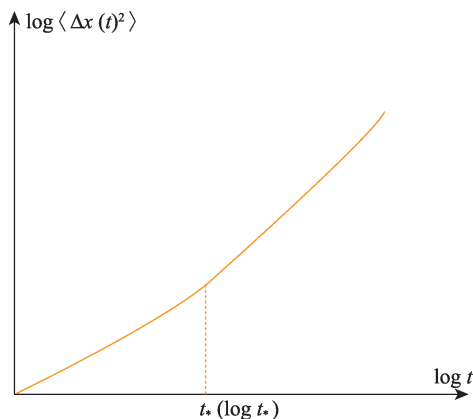


图2 D.2 解图

D.3 (0.6分)

在单次奔跑期间,由于浮游生物在 $t \ll \delta_0$ 时游动方向不变,可视为定向运动,则直接将 D.2 中的 u 替换为 u_0 便为该条件下的结果。时间极短,该部分的扩散可忽略。而当 $t \gg \delta_0$ 时,运动可近似为 B 部分的随机脉冲模型,考虑 B.1 的结果,将参数 δ_0 以及 $C = u_0^2$ 代入式(14)即可。而在中间过渡区,仍为单次奔跑,但扩散效应逐渐显现,均方位移仍由 $u_0^2 t^2$ 主导。汇总结果为

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \begin{cases} 2Dt (t \ll 2D/u_0^2) \\ u_0^2 t^2 (2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0) \\ u_0^2 \delta_0 t (\delta_0 \ll t) \end{cases} \quad (36)$$

注:更进一步地,可以证明对于 $t \gg \delta_0$, 有 $\langle \Delta x^2 \rangle = (u_0^2 \delta_0 + 2D)t$ 。然而,为了使中间区域存在,我们需要 $2D/u_0^2 \ll \delta_0$, 因此式(36)是一个很好的近似。

注:这里描述的浮游生物运动称为奔跑-翻滚运动 (run-and-tumble motion), 不同之处通常在于假设微生物在随机时间间隔改变游动方向(“翻滚”)。已知一些细菌包括大肠杆菌 (*Escherichia coli*) 以这种方式游动。

D.1 可由 C.2、C.5 两部分的结果推导得到,推导过程中要时刻注意单位的匹配。D.2 通过数学运算即可得到结果,推导电场中粒子运动的均方位移,明确不同时间尺度下的主导运动形式,定义特征时间量化分界。D.3 则应参考 D.2 和 B 部分的结果进行分类讨论。

E 部分水净化 (1.5分)

E.1 (1.5分)

胶体粒子间的相互作用势能是范德华吸引力和静电排斥力的叠加。当浓度 c 足够低时,相互作用能 $U(d)$ 会形成势垒,胶体稳定;但若超过某个临界值,该势垒便会消失,胶体失稳。这个临界值正是本问题需要确定的关键所在。

$$\min U'(d) = 0 \quad (37)$$

令题目中式(6)的一阶和二阶导数为零

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2 \lambda} e^{-d/\lambda} = 0 \quad (38)$$

$$U''(d) = -\frac{2A}{d^3} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2 \lambda^2} e^{-d/\lambda} = 0 \quad (39)$$

两式相除得

$$\frac{\frac{A}{d^2}}{-\frac{2A}{d^3}} = \frac{\frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2 \lambda} e^{-d/\lambda}}{\frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2 \lambda^2} e^{-d/\lambda}} \quad (40)$$

化简得

$$\frac{\frac{1}{d^2}}{-\frac{2}{d^3}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda^2}} \quad (41)$$

进而得到 $d = 2\lambda$ 。

代入式(38)中求解 λ 则

$$\frac{A}{(2\lambda)^2} = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2 \lambda} e^{-d/\lambda} \quad (42)$$

同乘 $4\lambda^2$ 得

$$A = \frac{4B\epsilon(kT)^2}{q^2} \lambda e^{-2} \quad (43)$$

则

$$\lambda = \frac{Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2} e^2 \quad (44)$$

进而

$$d = 2\lambda = \sqrt{\frac{Aq^2 \lambda}{B\epsilon(kT)^2}} \quad (45)$$

由题目中式(7) $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}$ 可推得 $c =$

$$\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2} \lambda^{-2}, \text{ 将 } \lambda = \frac{Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2} e^2 \text{ 可得}$$

$$c = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{e^4 N_A A^2 q^6} \quad (46)$$

注:在文献中,通常认为当能量势垒低至 $d \rightarrow \infty$ 达到临界浓度,即 $\max U(d) = 0$, 尽管这不符合试卷的要求。如果采用这一条件,则会得到

$c = \frac{B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{2e^2 N_A A^2 q^6}$, 相差了一个因子 $e^2/8 \approx 0.92$ 。

E部分将前面的模型与水净化的实际应用紧密结合,展示了通过控制物理条件 c 来调控胶体的宏

观状态。本部分解题过程则是考虑势垒存在与否的临界值。势垒消失的条件为极值点与拐点重合,需同时满足一阶、二阶导数为零;联立方程时消去指数项,保证计算准确。



她用物理的情趣,引我们科苑揽胜; 她用知识的力量,助我们奋起攀登!

欢迎投稿,欢迎订阅

《现代物理知识》杂志隶属于中国物理学会,由中国科学院高能物理研究所主办,是我国物理学领域的中、高级科普性期刊。

科技创新、科学普及是实现创新发展的两翼。《现代物理知识》旨在普及科学知识、弘扬科学精神,设有物理知识、物理前沿、科技经纬、科学源流、教学参考、中学园地、科学书屋和科苑快讯等栏目。诚邀在物理学及相关领域工作的科技、教育和科普等方面的专家学者,以公众喜闻乐见的文字,深入浅出、图文并茂地与读者分享现代物理知识、科学前沿成果和大科学装置进展等精彩故事,共襄“两翼齐飞”之盛举。投稿时请将稿件的 Word 文档发送至本刊电子信箱 mp@mail.ihep.ac.cn,并将联系人姓名、详细地址、邮政编码,以及电话、电子信箱等联系方式附于文章末尾。

所投稿件一经本刊录用,作者须将该篇论文各种介质、媒体的版权转让给编辑部所有,并签署《现代物理知识》版权转让协议书(全部作者签名),如不接受此协议,请在投稿时予以声明。来稿一经发表,将一次性酌情付酬,以后不再支付其他报酬。

2026年《现代物理知识》每期定价15元,全年6期90元,欢迎新老读者订阅。

需要往期杂志的读者,请按下列价格付款:

2022~2025年单行本每期15元;2010~2021年合订本每本60元,2022~2023年合订本每本90元。

订阅方式

(1) 邮局订阅 邮发代号:2-824。

(2) 编辑部订阅(请通过银行转账到以下账号,并在附言中说明“现代物理知识**年**期”)

名称:中国科学院高能物理研究所

开户行:工商银行北京永定路支行

账号:0200004909014451557

(3) 科学出版社期刊发行部:联系电话 010-64017032 64017539;

(4) 网上购买:搜淘宝店、微店店铺名称:中科期刊;淘宝、微信购买二维码:



淘宝网购刊



微信购刊