

量子纠缠和巧克力

吴 飙

(北京大学物理学院量子材料科学中心 100871; 中国科技大学上海研究院维尔切克量子中心 201315)

1. 引言和历史

虽然量子力学在1926年就已经完全建立,但直到1935年物理学家才开始注意到量子纠缠。受著名的EPR思想实验^[1]启发,薛定谔在一篇1935年发表的论文中第一次定义和阐述了量子纠缠^[2]。薛定谔在论文的开头这样写道,

两个系统,它们各自具有一个 ψ 函数(代表),通过已知的力而发生短暂的物理相互作用。当这两个系统在相互影响一段时间之后又再次分离时,它们不再能用以前的方式来描述,即赋予它们各自一个 ψ 函数(代表)。我认为这不是量子力学的特征之一,而是量子力学的标志-量子力学完全背离经典思想的标志。通过相互作用,两个 ψ 函数(代表)已经纠缠在一起。

薛定谔用的术语 ψ 函数(ψ -function)或代表(representative)指的是现代人更熟悉的波函数或纯态。在这段简单的论述中,薛定谔明确地指出了量子纠缠的一个基本特征:处于纠缠态的个体不再具有确定的量子状态。他特别强调了这个特征是量子力学完全不同于经典物理的标志,不是众多特征之一。

薛定谔的这个观点入木三分,非常深刻。对于一个经典系统,只有了解了系统的每一个组分,我们才能说了解了这个系统的整体,比如,一个具有 n 个粒子的系统,只有知道每一个粒子的位置 \mathbf{x}_i 和动量 \mathbf{p}_i ,我们才算精确知道了整个体系的状态。这和我们日常经验相符。如果你宣称你完全了解一盒巧克力,那你一定知道盒子中每一块巧克力的颜色,形状等性质。但是对于多体量子态,情况完全不同。

为了具体说明这个特征,我们考虑常见的自旋单态,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (1)$$

这里 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 是 $\hat{\sigma}_z$ 的两个本征态:前者代表自旋向上,后者代表自旋向下。每一个自旋的状态空间是一个二维希尔伯特空间 \mathcal{H}_2 ,这个双自旋系统的希尔伯特空间是 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ 。 $|\psi\rangle$ 是希尔伯特空间 \mathcal{H} 中的一个向量,它完全描述了两个自旋的总体状态。它们处于两个状态的叠加:第一个状态中自旋1向上自旋2向下;第二个状态中自旋1向下自旋2向上。那么自旋1和自旋2分别处于什么状态呢?它们都处于如下混态,

$$\rho = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \quad (2)$$

数学上这个态不是希尔伯特空间 \mathcal{H}_2 中的向量,因此自旋1和2都不再具有确定的量子状态.物理上,它似乎和单自旋态

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (3)$$

相同:如果对自旋进行 z 方向分量的测量, ρ 和 $|\varphi\rangle$ 都分别有50%的几率测得自旋向上或向下。但是,如果进行 x 方向分量的测量, ρ 和 $|\varphi\rangle$ 非常不一样: ρ 依然有50%的几率分别测得自旋 x 方向的两个分量; $|\varphi\rangle$ 是100%的几率沿 x 正方向。如果我们能把两块巧克力制备到类似 $|\psi\rangle$ 的量子纠缠态,那么每一块巧克力不再具有确定的形状或其他性质。

薛定谔当时也注意到了量子纠缠的另外一个特征,超距关联。他在文章中这样写道^[2],“……对于其中的任何一个系统,以前的所有知识都可能完

全丧失,我们只剩下一个特权:把实验限制在其中一个系统上,通过观察重新确定一个 ψ 函数之后,就可以同时推断出另一个系统的 ψ 函数。”这就是纠缠中的关联现象,而且是超距关联,因为它和距离无关。但是薛定谔在论文后面的讨论中没有仔细讨论这个关联现象。现在已经不可能完全确定薛定谔为什么没有特别关注这个性质。一个可能的原因是,薛定谔并不觉得这个性质非常重要,这是日常生活中常见的现象。小明出差,住进旅馆后打开行李箱,发现只有一只手套而且是左手的,那么无论离家多远,他瞬间立刻知道留在家的那只肯定是右手手套。反之,如果行李箱里的是右手的,那么留在家的是左手的。

薛定谔可能认为手套之间的关联和量子纠缠中的关联是类似的,没有意识到它们之间有非常微妙的区别。这种微妙而深刻的区别直到1964年才被贝尔用不等式澄清^[3]。下面我们将详细讨论这个区别。除了自旋单态(1),我们还将讨论另外一个常见的纠缠态,GHZ态^[4,5],

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle). \quad (4)$$

我们将针对这两个纠缠态构建两个以巧克力为例的经典系综。和相应的量子纠缠态对比,这两个巧克力系综有很多相同或类似的性质,但是总是存在一些不可消去的微妙区别。

2. 自旋单态及相应的经典系综

自旋单态有一个非常重要的性质——旋转对称性。公式(1)是自旋单态用 $\hat{\sigma}_z$ 的本征态展开时的形式。即使用沿任意方向 \vec{n} 的自旋算符 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ 的本征态展开,这个形式保持不变。也就是说,自旋单态(1)可以重新表达成

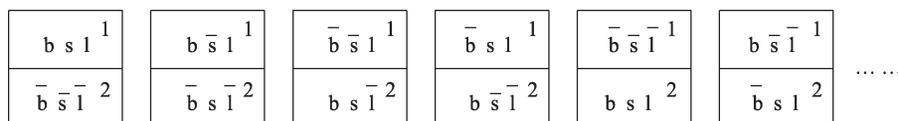


图1 巧克力单态系综装箱方式示例。b表示黑色, \bar{b} 表示非黑色;s表示方形, \bar{s} 表示非方形;l表示酒心, \bar{l} 表示非酒心。注意第一个盒子2号格子里的巧克力可能是没有酒心的白色三角形巧克力

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_+n_-\rangle - |n_-n_+\rangle). \quad (5)$$

在这个表达式中,

$$|n_+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, |n_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

这意味着,当我们沿任意方向 \vec{n} 进行测量,如果自旋1的结果是正方向,那么自旋2的结果一定是负方向,反之,如果自旋1的结果是负方向,那么自旋2的结果一定是正方向。类似地,混态(2)也可以重新表达为

$$\rho = \frac{1}{2}|n_+\rangle\langle n_+| + \frac{1}{2}|n_-\rangle\langle n_-|. \quad (7)$$

这就是说,当我们沿任意方向 \vec{n} 测量自旋1或自旋2,正方向和负方向的结果分别有50%的几率。

针对自旋单态(1),我们构建如下巧克力系综。它包括2N块巧克力,其中N块巧克力是黑色,N块巧克力是方形,N块巧克力有酒心。注意这些巧克力可能是白色、圆形,而且没有酒心。有N个完全相同的盒子,每一个盒子里有两个格子。我们把巧克力成对放入盒中。装箱规则是:同一个盒子中的两块巧克力不能同是黑色,不能同是方形,不能同是酒心。图1展示了几种符合这个规则的装箱方式。下面我们来仔细比较这个巧克力系综和自旋单态的性质。

单体几率 -对于自旋单态(1),测量自旋1沿任意方向 \vec{n} 的分量,有两个可能的结果:50%的几率为正和50%的几率为负。在巧克力系综,格子1中巧克力有50%的几率是黑色,50%的几率不是黑色;50%的几率是方形,50%的几率不是方形;50%的几率有酒心,50%的几率无酒心。显然,从单体几率看,我们构建的巧克力系综和自旋单态完全相同。比较自旋2和格子2中的巧克力有类似的结果。

超距关联—由于系综中的巧克力是按照一定的规则装盒的(参见图1),同一盒子里的两块巧克力之间存在很强的关联。如果格子1中的巧克力是黑色的,那么格子2中的巧克力一定不是黑色的;反之,如果格子1中的巧克力不是黑色的,那么格子2中的巧克力一定是黑色的。虽然两个格子相互挨着,巧克力之间的这种关联是和距离无关的,是超距的:设想把盒子中的两块巧克力装入两个相同小盒子,盖上盖子后分开。无论分开多远,当你打开其中的一个小盒子发现巧克力不是黑色,那么离你很远的小盒子中的巧克力一定是黑色。

另外,在自旋单态中,出现自旋1向上自旋2向下的结果的概率是50%;出现自旋1向下自旋2向上的结果的概率是50%。巧克力系综的情况是相同的:有50%的概率格子1中的巧克力是黑色,格子2中的巧克力是非黑色;50%的概率格子1中的巧克力是非黑色,格子2中的巧克力是黑色。

显然,对于巧克力的其他两个性质,形状和酒心,结论是相同的:如果格子1中的巧克力是三角形并且有酒心,那么格子2中的巧克力是方形且没有酒心。

这和前面讨论过的自旋单态(1)中自旋1和自旋2之间的关联类似:如果测量发现自旋1向上,那么自旋2一定向下;反之,如果测量发现自旋1向下,那么自旋2一定向上。

以上分析表明,即使从超距关联的角度,巧克力系综和自旋单态之间似乎也没有任何区别。区别当然是存在的,只是比较微妙,必须细致分析,利用精确的数学工具才能发现。这就是我们下面要讨论的贝尔不等式。

贝尔不等式—贝尔在1964年发现的这个不等式可以展示自旋单态及其相应的巧克力系综之间微妙而又深刻的区别^[3]。贝尔不等式关注的是两块巧克力不同性质之间的关联,如同一个盒子里一块巧克力是黑色另外一块是方形的概率。为了简洁和方便,我们令黑色是性质A,方形是性质B,酒心是性质C。同时,我们引入三个关联几率, $p(A,$

$B), p(B, C)$ 和 $p(A, C)$ 。 $p(A, B)$ 是指从巧克力系综中任取一个盒子,其中格子1里的巧克力是黑色,格子2中巧克力是方形的概率; $p(B, C)$ 是指任取一个盒子,其中格子1里的巧克力是方形,格子2中巧克力有酒心的概率; $p(A, C)$ 是指任取一个盒子,其中格子1里的巧克力是黑色,格子2中巧克力有酒心的概率。贝尔发现这三个关联几率满足如下不等式

$$p(A, B) + p(B, C) \geq p(A, C). \quad (8)$$

我们下面来证明这个不等式。

首先我们注意到,如果格子2中的巧克力是方形,那么根据装盒规则,格子1中的巧克力一定不是方形的。因此如果定义格子1中巧克力是黑色但不是方形的概率是 $\tilde{p}(A, \neg B)$,那么显然 $\tilde{p}(A, \neg B) = p(A, B)$ 。类似地,我们有 $\tilde{p}(B, \neg C) = p(B, C)$ 和 $\tilde{p}(A, \neg C) = p(A, C)$ 。这样不等式(8)等价于

$$\tilde{p}(A, \neg B) + \tilde{p}(B, \neg C) \geq \tilde{p}(A, \neg C). \quad (9)$$

注意, $p(A, B)$ 是两块巧克力之间的关联概率,而 $\tilde{p}(A, \neg B)$ 是单个巧克力的概率。这两个概率相等是因为同一盒子中两块巧克力之间的超距关联。

我们借助图2来证明不等式(9)^[6]。图2中的大方框代表所有的 $2N$ 块巧克力,这个大方框被巧克力的三个性质分为八个部分: $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$ 。比如, K_1 包括所有不是方形和没有酒心的黑色巧克力, K_8 包括所有不是方形,没有酒心和不是黑色的巧克力。通过直接观察图2,我们可以得到

$$\tilde{p}(A, \neg B) = \frac{K_1 + K_4}{2N}, \quad (10)$$

$$\tilde{p}(B, \neg C) = \frac{K_2 + K_5}{2N}, \quad (11)$$

$$\tilde{p}(A, \neg C) = \frac{K_1 + K_2}{2N}. \quad (12)$$

显然这三个几率满足不等式(9)。这也意味着贝尔不等式(8)成立。对于图1中的六个盒子,我们有

$$p(A, B) = \frac{1}{3}, p(B, C) = 0, p(A, C) = \frac{1}{6}. \quad (13)$$

它们显然满足贝尔不等式(8)。

有趣的是自旋单态(1)的量子关联会违反这个不等式。为了展示这点,我们考虑 xz 平面内的三个

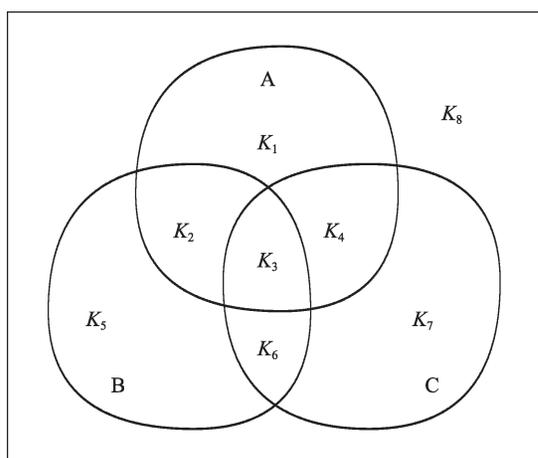


图2 大方框代表所有元素的集合。上圈是所有具有性质A的元素的组合；下左圈是所有具有性质B的元素的组合；下右圈是所有具有性质C的元素的组合。对于巧克力，大方框代表整个巧克力系综：A表示黑色，B表示方形，C表示酒心。对于自旋，大方框代表所有的测量结果：A表示自旋沿 \vec{n}_1 方向为正，B表示沿 \vec{n}_2 方向为正，C表示沿 \vec{n}_3 方向为正方向： \vec{n}_1 、 \vec{n}_2 和 \vec{n}_3 (见图3)，并测量自旋沿这三个方向的分量。为了和巧克力进行比较，我们把自旋沿 \vec{n}_1 正方向的测量结果标记为性质A。类似地，自旋沿 \vec{n}_2 正方向的测量结果标记为性质B，自旋沿 \vec{n}_3 正方向的测量结果标记为性质C。在测量自旋1沿 \vec{n}_1 方向的分量后，测量自旋2沿 \vec{n}_2 方向的分量(这个表述只是为了方便，测量结果其实和测量次序无关)，两个测量结果都为正的概率是^[6]

$$p_q(A, B) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1}{2}. \quad (14)$$

类似地，测量自旋1沿 \vec{n}_2 方向的分量后测量自旋2沿 \vec{n}_3 方向的分量，结果都为正的概率是

$$p_q(B, C) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}. \quad (15)$$

测量自旋1沿 \vec{n}_1 方向的分量后测量自旋2沿 \vec{n}_3 方向的分量，结果都为正的概率是

$$p_q(A, C) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2}. \quad (16)$$

考虑一个情况，其中 $\theta_1 = \pi/3, \theta_2 = 2\pi/3$ 。这时我们有

$$p_q(A, B) = \frac{1}{8}, p_q(B, C) = \frac{1}{8}, p_q(A, C) = \frac{1}{8}. \quad (17)$$

显然，

$$p_q(A, B) + p_q(B, C) < p_q(A, C). \quad (18)$$

这意味着自旋单态中两个自旋之间的几率关联会违反贝尔不等式！当然，可以选择 θ_1 和 θ_2 的其他取值，比如 $\theta_1 = \pi/2$ 和 $\theta_2 = \pi$ ，这时候贝尔不等式是满足的。但重要的是，对于某些 θ_1 和 θ_2 取值，量子纠缠中的关联会违反贝尔不等式。不同的 θ_1 和 θ_2 取值对应巧克力系综中的不同装盒方式。我们前面证明了，只要满足装盒的规则，无论如何装盒，贝尔不等式都是满足的。是否会违反贝尔不等式是图1中的巧克力系综和自旋单态之间的区别，微妙、不易察觉但是非常深刻。下面我们具体分析一下导致违反贝尔不等式的原因。

贝尔不等式是借助图2证明的。我们将看到图中子集的划分对于自旋没有良好的定义。为了确定起见，我们只考虑自旋1。图2中的大方框代表对自旋1的所有测量结果。对自旋1沿 \vec{n}_1 方向测量，所有正的结果构成圈A表示的子集；对自旋1沿 \vec{n}_2 方向测量，所有正的结果构成圈B表示的子集；对自旋1沿 \vec{n}_3 方向测量，所有正的结果构成圈C表示的子集。

K_1 和 K_4 构成这样一个子集：对自旋1同时沿 \vec{n}_1 和 \vec{n}_2 两个方向测量，前者为正后者为负的所有测量结果。一般情况下，这是无法做到的，因为我们不能同时对一个自旋沿不同的方向测量。但是由于自旋1处于自旋单态，这种测量成为可能：对于自旋1沿 \vec{n}_2 方向的测量结果可以从对自旋2沿 \vec{n}_2 方向的

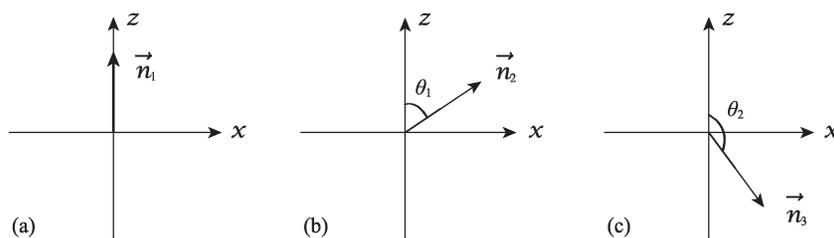


图3 沿三个不同的方向测量自旋： \vec{n}_1 、 \vec{n}_2 和 \vec{n}_3

测量结果推算出来。这样, K_1 和 K_4 构成的子集可以等效看成这样: 对自旋 1 沿 \vec{n}_1 同时对自旋 2 沿 \vec{n}_2 方向测量, 二者都为正的所有测量。

但是对于更小的子集, 比如 K_1 , 我们就会遇到不可克服的麻烦。按理 K_1 应该包括对自旋 1 同时沿三个不同的方向 \vec{n}_1, \vec{n}_2 和 \vec{n}_3 的某种测量结果。一般情况下这是不可能的, 而且这次自旋单态也无法挽救。一个可能的挽救办法是让三个测量不同时。即使这样, 类似 K_1 的子集依然无法明确定义。如果按 \vec{n}_1, \vec{n}_2 和 \vec{n}_3 这个次序对自旋 1 进行测量, K_1 中元素的个数应该正比于 $\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$; 如果交换 \vec{n}_2 和 \vec{n}_3 的次序, 那么 K_1 正比于 $\sin^2 \frac{\theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ 。这说明 K_1 的定义依赖于测量的次序, 因此我们无法明确定义 K_1 。

显然图 2 中所有类似 K_1 的子集都无法明确定义。这背后的根本理由是三个自旋算符, $\vec{n}_1 \cdot \hat{\sigma}, \vec{n}_2 \cdot \hat{\sigma}$ 和 $\vec{n}_3 \cdot \hat{\sigma}$, 相互不对易。形成鲜明对照的是, 对于巧克力, 所有这些子集 $K_j, j=1, 2, \dots, 8$ 都是有明确定义的, 比如 K_1 包括所有不是方形和没有酒心的黑色巧克力。

3. GHZ 态及相应的经典系综

GHZ 态(4)是另外一个经常用来展示量子纠缠特征的量子态。它是一个三自旋的纠缠态。我们这里只关心每一个自旋沿 x, y 和 z 三个方向的分量。显然, GHZ 态中的任何一个自旋不再具有确定的量子纯态, 而是处于混态(2)。因此, 如果我们对其中的任何一个自旋沿 x, y 或 z 方向进行测量, 我们分别有 50% 的几率得到正的结果。

GHZ 态中的三个自旋之间是存在关联的。沿 z 方向测量, 如果其中一个自旋的结果是向上, 那么其他两个自旋的结果也是向上; 反之, 如果其中一个自旋的结果是向下, 那么其他两个自旋的结果也是向下。这个两种结果出现的几率都是 50%。沿 x 和 y 方向的关联没有这么直接, 而是隐含在下面三个等式中。通过直接计算, 我们可以验证如下等式

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)} |\Phi\rangle = |\Phi\rangle, \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)} |\Phi\rangle = |\Phi\rangle, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)} |\Phi\rangle = |\Phi\rangle. \quad (21)$$

这三个公式可以通过直接计算验证。它们说明, 三个自旋沿 x 和 y 方向的测量结果是相互关联的: 如果我们测量三个自旋中的一个自旋的 x 分量以及其他两个自旋的 y 分量, 这三个结果虽然可正可负, 但它们乘在一起一定是正的。一个等价的说法是, 下面两种测量结果不可能出现: 一个结果是负, 其他两个结果为正; 三个结果都是负的。

针对 GHZ 态这些特征, 我们建立如下巧克力系综。对应自旋的 x, y 和 z 三个方向, 我们考虑巧克力的三个性质, 颜色、形状和产地: 黑色和非黑色分别对应自旋 x 分量的正负; 方形和非方形分别对应自旋 y 分量的正负; 是否产于瑞士对应自旋 z 分量的正负。系综中总共有 $24N$ 块巧克力, 其中 $12N$ 块巧克力是黑色的, $12N$ 块巧克力是方形的, $12N$ 块巧克力是瑞士产的。将这些巧克力三块一组放入 $8N$ 个盒子, 每一个盒子有三个格子, 从左到右依次编号为 1, 2, 3。这 $8N$ 个盒子平均分为八组, 每一组按照一个不同的方式装盒。在一半的盒子中, 三块巧克力都是瑞士的; 在另外一半中, 三块巧克力都不产于瑞士。这八种装盒的具体方式请参见图 4。下面我们来仔细比较这个巧克力系综和自旋 GHZ 态的性质。

单体几率 - 图 4 中有 24 块巧克力, 其中有 12 块巧克力是黑色, 12 块巧克力不是黑色。因此, 在整个巧克力系综中, 有 12N 块巧克力是黑色, 12N 块巧克力不是黑色。也就是说巧克力有 50% 的几率是黑

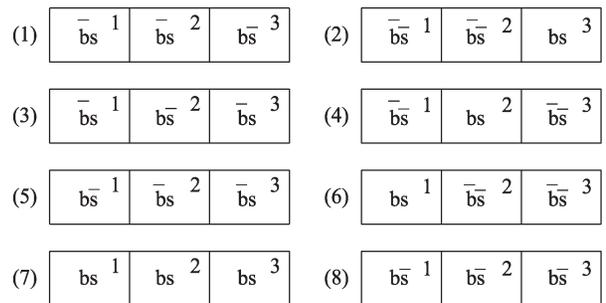


图 4 巧克力 GHZ 系综的八种装盒方式。b 表示黑色, \bar{b} 表示非黑色; s 表示方形, \bar{s} 表示非方形。在这八个盒子中, 有一半其中的三块巧克力都是瑞士产的; 另外一半中三块巧克力都不是产于瑞士

色,50%的几率不是黑色。关于形状和产地,我们有类似的结果:巧克力有50%的几率是方形,50%的几率不是方形;巧克力有50%的几率是瑞士的,50%的几率不是产于瑞士。这和GHZ态(4)中单个自旋的测量结果类似。对GHZ态中任意一个自旋进行测量,无论是沿 x 方向还是 y 和 z 方向,结果都是一样:50%的几率为正和50%的几率为负。因此,从单体几率看,这个巧克力系综和自旋GHZ态完全相同。

超距关联—由于巧克力是按照图4中的八种既定方式装在盒子中,而不是随机装盒,因此同一个盒子中的三块巧克力之间存在关联,而且这种关联是超距的,即和距离无关:如果它们被分开放到三个相距遥远的星球上,它们之间的关联不会被改变。对于产地,关联是显然的:如果某个盒子中的一块巧克力是瑞士的,其他两块也是;如果不是产于瑞士,其他两块也不是。对于颜色和形状,关联也存在只是不很显然。为了刻画这种关联,我们考察一个联合变量

$$C_{yyy} = c_x^{(1)} c_y^{(2)} c_y^{(3)}. \quad (22)$$

如果1号格子里的巧克力是黑色,那么 $c_x^{(1)}=1$;如果1号格子里的巧克力不是黑色,那么 $c_x^{(1)}=-1$ 。如果2号和3号格子里的巧克力是方形,那么 $c_y^{(2)}=c_y^{(3)}=1$;如果不是方形,那么 $c_y^{(2)}=c_y^{(3)}=-1$ 。对于图4中的第一个装盒方式,我们有 $c_x^{(1)}=-1$, $c_y^{(2)}=1$ 和 $c_y^{(3)}=-1$,这意味着 $C_{yyy}=1$ 。对于其他七种装盒方式,通过逐一检查,我们有同样的结果, $C_{yyy}=1$ 。这和公式(19)体现的量子纠缠中的关联是一致的。

类似地,我们可以定义

$$C_{yyy} = c_y^{(1)} c_x^{(2)} c_x^{(3)}, C_{yyx} = c_y^{(1)} c_y^{(2)} c_x^{(3)}. \quad (23)$$

通过逐一验算可以确认,对于图4中的所有装盒方式,我们都有 $C_{yyy} = C_{yyx} = 1$ 。这和GHZ态中的量子关联(20, 21)是一致的。

和自旋单态(1)类似,尽管我们努力使巧克力系综和GHZ态(4)具有更多的相同特征,但是我们不可能让它们完全相同。这个巧克力系综和GHZ态(4)也是有区别的。为了看到这个区别,我们定义一个新的联合变量

$$C_{xxx} = c_x^{(1)} c_x^{(2)} c_x^{(3)}. \quad (24)$$

对于图4中的第二种装盒方式,我们有 $c_x^{(1)}=-1$, $c_x^{(2)}=-1$ 和 $c_x^{(3)}=1$,因此 $C_{xxx}=1$ 。对于其他七种情况,我们同样有 $C_{xxx}=1$ 。这意味着,对于这个巧克力系综, $C_{xxx}=1$ 。和此形成对照的是,对于GHZ态,我们可以证明

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)} |\Phi\rangle = -|\Phi\rangle. \quad (25)$$

这和 $C_{xxx}=1$ 正好相反。

这说明我们根据图4构建的巧克力系综虽然在很多性质上和GHZ态一致,但是不能在所有的性质上完全一致。事实上,可以严格证明,不存在一个经典系综,它的几率和几率关联性质和GHZ态完全一致。假设存在,针对等式(19,20,21)隐含的关联,那么这个经典系综必须满足如下三个条件:

$$C_{xyy} = c_x^{(1)} c_y^{(2)} c_y^{(3)} = 1, \quad (26)$$

$$C_{yyx} = c_y^{(1)} c_x^{(2)} c_x^{(3)} = 1, \quad (27)$$

$$C_{yyy} = c_y^{(1)} c_y^{(2)} c_y^{(3)} = 1. \quad (28)$$

这里 c_x 和 c_y 可以是系综中个体的任意两个不同的性质。利用恒等式,

$$(c_y^{(1)})^2 = (c_y^{(2)})^2 = (c_y^{(3)})^2 = 1, \quad (29)$$

我们可以证明

$$C_{yyy} C_{yyx} C_{xyy} = c_x^{(1)} c_y^{(2)} c_y^{(3)} c_y^{(1)} c_x^{(2)} c_x^{(3)} c_y^{(1)} c_y^{(2)} c_x^{(3)} = c_x^{(1)} c_x^{(2)} c_x^{(3)} = C_{xxx}. \quad (30)$$

因此 $C_{xxx}=1$ 。我们构建的巧克力系综确实满足这个等式。与此形成鲜明对比的是,由于泡利算符 $\hat{\sigma}_x$ 和 $\hat{\sigma}_y$ 不对易,等式(25)无法从等式(19,20,21)推导出来。

4. 总结

我们构建了两个巧克力系综,努力让它们和相应的量子纠缠态具有尽量多的共同特征,但是我们无法让巧克力系综和它相应的量子纠缠态完全相同。这是一个原则问题。和永动机类似:我们永远造不出永动机,因为它会违反热力学第一或第二定律。对于任意一个纠缠态,我们可以构建出一个经典系综,它的单体几率和这个纠缠态完全相同,但是它的多体几率关联不可能和这个纠缠态完全相同。通过对自旋单态和GHZ态的讨论,我们发现根

本的原因是一个量子体系不同物理性质对应的算符一般情况下是不对易的。

薛定谔虽然指出了量子纠缠的最本质特征,但是他没有提出定量描述纠缠的方法。1957年埃弗里特在他的博士论文中用冯诺依曼熵定量描述了纠缠^[7,8]。

致谢:本工作得到了国家自然科学基金会(92365202,12475011,11921005),科技部重大研究计划(2024YFA1409002)和上海市科技项目(2019SHZDZX01,25LZ2601100)的支持。

参考文献

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, *Physi-*

cal Review, **47**, 777 (1935).

[2] E. Schrödinger, *Discussion of Probability Relations between Separated Systems*, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31**, 555 (1935).

[3] J.S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, *Physics* **1**, 195 (1964).

[4] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Bell's theorem without inequalities*, *American Journal of Physics* **58**, 1131 (1990).

[5] N. David Mermin, *What's Wrong with these Elements of Reality?*, *Physics Today* **38**, 38 (2008).

[6] 吴飙,《简明量子力学》(北京大学出版社,2020)。

[7] B.S. DeWitt, N. Graham (eds.), *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1973).

[8] Biao Wu, *Everett's theory of the universal wave function*, *The European Physical Journal H* **46**, 7 (2021).



她用物理的情趣,引我们科苑揽胜;
她用知识的力量,助我们奋起攀登!

欢迎投稿,欢迎订阅

《现代物理知识》杂志隶属于中国物理学会,由中国科学院高能物理研究所主办,是我国物理学领域的中、高级科普性期刊。

科技创新、科学普及是实现创新发展的两翼。《现代物理知识》旨在普及科学知识、弘扬科学精神,设有物理知识、物理前沿、科技经纬、科学源流、教学参考、中学园地、科学书屋、科学正听和科苑快讯等栏目。诚邀在物理学及相关领域工作的科技、教育和科普等方面的专家学者,以公众喜闻乐见的文字,深入浅出、图文并茂地与读者分享现代物理知识、科学前沿成果和大科学装置进展等精彩故事,共襄“两翼齐飞”之盛举。投稿时请将稿件的Word文档发送至本刊电子信箱 mp@mail.ihep.ac.cn,并将联系人姓名、详细地址、邮政编码,以及电话、电子信箱等联系方式附于文章末尾。

所投稿件一经本刊录用,作者须将该篇论文各种介质、媒体的版权转让给编辑部所有,并签署《现代物理知识》版权转让协议书(全部作者签名),如不接受此协议,请在投稿时予以声明。来稿一经发表,将一次性酌情付酬,以后不再支付其他报酬。

2025年《现代物理知识》每期定价15元,全年6期90元,欢迎新老读者订阅。

需要往期杂志的读者,请按下列价格付款:
2010~2021年单行本每期10元;2022~2024年单行本每期15元;2010~2019年合订本每本60元。

订阅方式

(1) 邮局订阅 邮发代号:2-824。

(2) 编辑部订阅(请通过银行转账到以下账号,并在附言中说明“现代物理知识**年**期”)

名称:中国科学院高能物理研究所

开户行:工商银行北京永定路支行

账号:0200004909014451557

(3) 科学出版社期刊发行部:联系电话 010-64017032 64017539;

(4) 网上购买:搜淘宝店、微店店铺名称:中科期刊;淘宝购买链接:



淘宝网购刊



微信购刊