



空 化

——2023 亚洲物理奥林匹克竞赛理论第三题解答

许 鸣¹ 宋 峰²

(1. 海南微城未来教育学校 571541; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

2023 年亚洲物理奥赛理论第三题是关于空化的,题目见上一期,主要考查了热学知识。在竞赛组委会提供的答案基础上,本文给出详细答案解析。

A 部分:初步分析 [1.5 分]

A.1 本题要求通过量纲分析,估算纯蒸汽气泡的坍塌时间 T 。如果水压小于气泡内蒸气压($p_{\infty} \leq p_v$),气泡就不会坍塌。因此,我们取 $p_{\infty} > p_v$,并假设差值 $p_{\infty} - p_v$ 将出现在最终公式中。这些物理量的单位为 $[R_0] = \text{m}$, $[\rho] = \text{kg/m}^3$, $[p_{\infty} - p_v] = \text{N/m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ 。

其对应的量纲为: $[L]$, $[\text{ML}^{-3}]$, $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$ (1)

这些物理量中唯一具有时间量纲的组合是

$$T \sim R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_{\infty} - p_v}} \approx 0.1 \text{ s} \quad (2)$$

A.2 压强的平衡条件为:

$$p_v + q = p_{\infty} + \frac{2\sigma}{R} \quad (3)$$

在 $R = R_0$ 和 $q = q_0$ 下,得到

$$q_0 = p_{\infty} - p_v + \frac{2\sigma}{R_0} \approx 170 \text{ kPa} \quad (4)$$

另一方面,由于该过程为等温过程,根据玻意耳定律,有

$$q_0 R_0^3 = q R^3 \quad (5)$$

可以得到

$$p_{\infty} = p_v + \frac{q_0 R_0^3}{R^3} - \frac{2\sigma}{R} \quad (6)$$

当 R 取最小值时, p_{∞} 即为临界压强。其中最小半径为:

$$R_c = R_0 \sqrt{\frac{3q_0 R_0}{2\sigma}} \approx 60 \mu\text{m} \quad (7)$$

将最小半径代入式(6),求得临界压强为

$$p_c = p_v - 2q_0 \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^3 \approx 700 \text{ Pa} \quad (8)$$

A 部分是关于气泡坍塌时间和临界压强的初步分析,由题意,通过量纲分析可以得到坍塌时间。根据压强平衡条件、玻马定律即可求解空气分压强和临界压强。

B 部分:主要动力学[6.0 分]

B.1 本题要求得到一个方程,将气泡半径 $R(t)$ 和它对时间的一阶导数 $R'(t)$ 、二阶导数 $R''(t)$ 、表面张力 σ 、水的密度 ρ 、外部水压 p_{∞} 以及气泡内部的压力 p 联系起来。

设 $v(r, t)$ 表示在时间 t 时距离气泡中心 r 处的流体的径向速度。设 $u(t) = v(R, t)$, 即

$$u(t) = R'(t) \quad (9)$$

由不可压缩条件可得

$$v(r, t) = \frac{R^2 u(t)}{r^2} \quad (10)$$

因此

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R^2 u}{r^2} \right) = \frac{2R}{r^2} u^2 + \frac{R^2}{r^2} u' \quad (11)$$

径向加速度可表示为

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \frac{R^2}{r^2} u' + \frac{2R}{r^2} u^2 - \frac{2R^4}{r^5} u^2 \quad (12)$$

设 $p = p(r)$ 表示压强场(忽略时间的影响),由牛顿第二定律,有

$$\rho a = -p' \quad (13)$$

即

$$\frac{R^2}{r^2} u' + \left(\frac{2R}{r^2} - \frac{2R^4}{r^5} \right) u^2 = -\frac{p'}{\rho} \quad (14)$$

从 $r = R$ 到 $r = \infty$ 积分,得到

$$Ru' + \frac{3}{2}u^2 = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho} \quad (15)$$

由于气泡内部的压强满足

$$p = p(R) + \frac{2\sigma}{R} \quad (16)$$

可得出结论

$$RR'' + \frac{3}{2}(R')^2 + \frac{2\sigma}{\rho R} = \frac{p - p_\infty}{\rho} \quad (17)$$

最后,考虑到气泡压强 p 由蒸汽压 p_v 和空气分压 q 组成,即

$$p = p_v + q = p_v + q_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (18)$$

可以得到

$$\rho RR'' + \frac{3}{2}\rho(R')^2 + \frac{2\sigma}{R} - \frac{q_0 R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}} = p_v - p_\infty \quad (19)$$

B.2 本题要求请估算气泡半径增长速度 R' 的渐近终值,以及达到该渐近终值所需的时间。

在式(19)中,令 $R''=0$ 且 $R \rightarrow \infty$,得到 R' 的渐近终值

$$R'(\infty) = \sqrt{\frac{2(p_v - p_\infty)}{3\rho}} = \sqrt{\frac{2p_v}{3\rho}} \approx 1.24 \text{ m/s} \quad (20)$$

初始加速度也可以从(19)中得到

$$R''(0) = \frac{q_0 + p_v - 2\sigma/R_0}{\rho R_0} = \frac{p_\infty}{\rho R_0} \approx 10^7 \text{ m/s}^2 \quad (21)$$

利用初始加速度,可估算出 R' 达到渐近终值所需的时间

$$t = \frac{R'(\infty)}{R''(0)} \approx 0.1 \mu\text{s} \quad (22)$$

B.3 本题是根据给出的参数,估算气泡尺寸反弹前的最小半径。将(19)乘以 $2R^2 R'$ 得到

$$\rho \left[R^3 (R')^2 \right]' + 4\sigma RR' - 2q_0 R_0^{3\gamma} R^{2-3\gamma} R' = 2(p_v - p_\infty) R^2 R' \quad (23)$$

即

$$\rho \left[R^3 (R')^2 \right]' + 2\sigma (R^2)' + \frac{2q_0 R_0^{3\gamma} (R^{3-3\gamma})'}{3(\gamma-1)} = \frac{2}{3}(p_v - p_\infty) (R^3)' \quad (24)$$

从 $R(0) = R_0$ 和 $R'(0) = 0$ 积分到 $R(t) = R$ 和

$R'(t) = R'$, 得到

$$\rho R^3 (R')^2 + 2\sigma (R^2 - R_0^2) + \frac{2q_0 R_0^{3\gamma} (R^{3-3\gamma} - R_0^{3-3\gamma})}{3(\gamma-1)} = \frac{2}{3}(p_v - p_\infty) (R^3 - R_0^3) \quad (25)$$

即

$$\rho (R')^2 = \frac{2(p_v - p_\infty)}{3} - \frac{2\sigma}{R} + \frac{2R_0^3}{R^3} \left(\frac{\sigma}{R_0} + \frac{p_\infty - p_v}{3} + \frac{q_0}{3(\gamma-1)} - \frac{q_0 R_0^{3\gamma-3}}{3(\gamma-1) R^{3\gamma-3}} \right) \quad (26)$$

当 $R \ll R_0$ 时,首先有

$$R' \sim -R^{-3/2} \quad (27)$$

此外,反弹半径满足关系

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} = \frac{(\gamma-1)(p_\infty - p_v + 3\sigma/R_0)}{q_0} + 1 \quad (28)$$

考虑到

$$q_0 = p_\infty - p_v + 2\sigma/R_0 \approx 10 \text{ Pa} \quad (29)$$

可求得反弹半径为

$$R \approx 0.4 \mu\text{m} \quad (30)$$

B.4 在上一小问的分析中,我们已经得到

$$R' \sim -R^{-3/2} \quad (32)$$

在此基础上可以确定 $R(t) \sim (T-t)^\alpha$ 中的标度指数 α 。

将 $R(t) \sim (T-t)^\alpha$ 代入上式,得到

$$(T-t)^{\alpha-1} \sim -(T-t)^{-3\alpha/2} \quad (33)$$

由此可确定标度指数

$$\alpha = \frac{2}{5} \quad (34)$$

B.5 基于 B.3 得到的方程,可求出半径 $R_0=0.1 \text{ mm}$ 的气泡发生球形振荡的固有频率。引入新变量 x , 令 $R = R_0 x$, 将(19)式写为

$$\rho R_0^2 x x'' + \frac{3}{2} \rho R_0^2 (x')^2 + \frac{2\sigma}{R_0 x} - q_0 x^{-3\gamma} = p_v - p_\infty \quad (35)$$

令 $x = 1 + y$, 并保留 y 的线性项, 可得

$$\rho R_0^2 y'' + \frac{2\sigma}{R_0} (1-y) - q_0 (1-3\gamma y) = p_v - p_\infty \quad (36)$$

考虑到平衡条件

$$\frac{2\sigma}{R_0} - q_0 = p_v - p_\infty \quad (37)$$

可以推断

$$y'' + \frac{3\gamma q_0 - 2\sigma/R_0}{\rho R_0^2} y = 0 \quad (38)$$

因此,如果

$$3\gamma q_0 \leq 2\sigma/R_0 = q_0 + p_v - p_\infty \quad (39)$$

或者等价地,如果

$$p_\infty \leq p_v - (3\gamma - 1)q_0 \quad (40)$$

气泡将失去稳定性。

相反,如果 $p_\infty > p_v - (3\gamma - 1)q_0$, 则气泡将以固有频率振荡:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{(3\gamma - 1)q_0 + p_\infty - p_v}{\rho}} \approx 33 \text{ kHz} \quad (41)$$

B.6 本题中,将上一部分描述的气泡置于沿 x 轴方向的驻波中,给出了驻波的压力场表达式,要求求出作用于气泡上的平均力。

气泡的小幅振荡由以下方程描述:

$$\rho R_0^2 (y'' + 4\pi^2 f_0^2 y) = A \sin\left(\frac{2\pi f}{c} a\right) \sin(2\pi f t) \quad (43)$$

假设解的形式为

$$y(t) = B \sin(2\pi f t) \quad (44)$$

可得

$$B = \frac{A \sin(2\pi f a/c)}{4\pi^2 \rho R_0^2 (f_0^2 - f^2)} \quad (45)$$

由于

$$R(t) = R_0 + R_0 y(t) \quad (46)$$

气泡的体积为

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} R(t)^3 \approx \frac{4\pi}{3} R_0^3 [1 + 3y(t)] \quad (47)$$

平均力由下式给出

$$F = -\left\langle V \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle \quad (48)$$

该平均值是对时间的平均,其中压强的梯度为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2\pi f A}{c} \cos\left(\frac{2\pi f}{c} a\right) \sin(2\pi f t) \quad (49)$$

因此可得出结论

$$F = -\frac{f A^2 R_0}{2\rho c (f_0^2 - f^2)} \sin\left(\frac{4\pi f a}{c}\right) \quad (50)$$

B 部分考查了气泡动力学中的复杂物理现象,结合流体力学、热力学和振动理论,通过推导气泡半径随时间变化的方程,分析了渐近速度终值、反弹半径、坍塌时间和振荡频率等问题。题目难度较高,但逻辑清晰,侧重多物理规律的交叉运用。

C 部分:通过扩散使空化核溶解 [2.5 分]

C.1 本题将一个由空气和蒸汽组成的空化核,放置在水-空气溶液中,估算气泡完全溶解于水中所需的时间。

根据亨利定律,水中溶解空气的初始浓度为

$$u_i = H p_\infty \approx 0.024 \text{ kg/m}^3 \quad (51)$$

气泡附近溶解空气的初始浓度为

$$u = H q \approx 0.041 \text{ kg/m}^3 \quad (52)$$

由于 $u > u_i$, 空气将从气泡表面向外扩散,导致气泡内空气减少。气泡收缩使半径 R 减小,表面张力 $2\sigma/R$ 增大,因此气泡内部空气分压 q 升高,加速了空气向外扩散。最终导致气泡完全溶解。

为了定量分析空气的扩散,我们分析半径为 r 至 $r + \Delta r$ 的同心球壳区域,其中 Δr 很小。该区域内空气质量的变化率为

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \Delta r \frac{\partial u}{\partial t} \quad (53)$$

其中 $4\pi r^2 \Delta r$ 是该区域的体积,空气浓度 $u = u(r, t)$ 是 r 和 t 的函数。

另外,相同的量可以通过同心球之间的扩散通

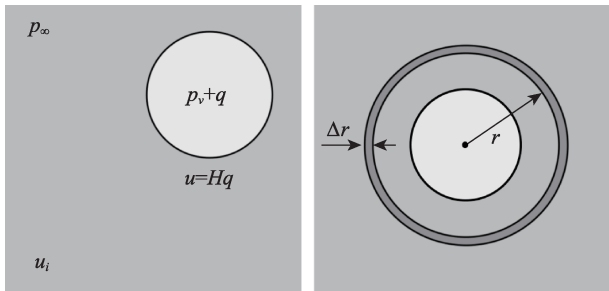


图1 (a) 系统的初始状态; (b) 解答中所采用的几何结构

量差来计算:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= 4\pi(r + \Delta r)^2 J(r + \Delta r) - 4\pi r^2 J(r) = \\ &4\pi(r + \Delta r)^2 \kappa \frac{\partial u}{\partial r}(r + \Delta r) - 4\pi r^2 \kappa \frac{\partial u}{\partial r}(r) \approx \\ &4\pi r^2 \kappa \Delta r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) + 8\pi r \kappa \Delta r \frac{\partial u}{\partial r}(r),\end{aligned}\quad (54)$$

这里我们考虑了通量的方向,以及

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r + \Delta r) \approx \frac{\partial u}{\partial r}(r) + \Delta r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) \quad (55)$$

比较这两个方程,我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\kappa}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (56)$$

在初始时刻 $t=0$ 时,水中溶解的空气浓度均匀为 u_i ,假设气泡的半径 R 保持恒定,气泡附近的空气浓度应等于 Hq :

$$\begin{cases} u(r,0) = u_i & r > R \\ u(R,t) = Hq & t > 0 \end{cases} \quad (57)$$

引入新变量 $v = r(u - qH)$ 和新时间参数 $\tau = \kappa t$, 扩散方程(56)变为

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad (58)$$

其中

$$\begin{cases} v(r,0) = r(u_i - qH) & r > R \\ v(R,\tau) = 0 & \tau > 0 \end{cases} \quad (59)$$

可以进一步引入

$$\xi = r - R \quad \text{和} \quad w(\xi, \tau) = v(R + \xi, \tau) \quad (60)$$

将(56)式写为

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (61)$$

其中

$$\begin{cases} w(\xi,0) = (R + \xi)(u_i - qH) & \xi > 0 \\ w(0,\tau) = 0 & \tau > 0 \end{cases} \quad (62)$$

可解得

$$w(\xi, \tau) = \frac{u_i - qH}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty \left(e^{-(\xi-\eta)^2/(4\tau)} - e^{-(\xi+\eta)^2/(4\tau)} \right) (\eta + R) d\eta \quad (63)$$

由于

$$u(r,t) = qH + \frac{v(r,\kappa t)}{r} = qH + \frac{w(r-R,\kappa t)}{r} \quad (64)$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{w}{r^2} \quad (65)$$

因此

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{R} \left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = (u_i - qH) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}} \right) \quad (66)$$

第二项对应于气泡周围扩散层的宽度,假设其远大于气泡本身大小。因此,气泡质量的变化率可以估计为

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi R^2 \kappa \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} \approx 4\pi \kappa R (u_i - qH) \quad (67)$$

另外,气泡的质量与空气密度有关,而空气密度又与压力成正比:

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 \delta = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{\delta_0 q}{p_\infty} \quad (68)$$

其中 $\delta_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 是大气压 $p_\infty = 10^5 \text{ Pa}$ 下的空气密度。此外,忽略蒸汽压,力的平衡条件为

$$q = p_\infty + \frac{2\sigma}{R} \quad (69)$$

导致

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \left(\delta_0 + \frac{\varepsilon}{R} \right) \quad (70)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{2\sigma\delta_0}{p_\infty} \approx 1.73 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^2 \quad (71)$$

将(70)式对 t 求导后,将其与(67)式相等,得到

$$4\pi \kappa R \left(u_i - p_\infty H - \frac{2\sigma H}{R} \right) = 4\pi \delta_0 R^2 \frac{dR}{dt} + \frac{8\pi}{3} \varepsilon R \frac{dR}{dt} \quad (72)$$

由于 $u_i - p_\infty H = 0$,我们有

$$-2\sigma \kappa H dt = \delta_0 R^2 dR + \frac{2}{3} \varepsilon R dR \quad (73)$$

直接积分得到

$$2\sigma \kappa H t = \frac{\delta_0 R_0^3}{3} + \frac{4\varepsilon R_0^2}{3} \quad (74)$$

最终得到

$$t = \frac{(\delta_0 R_0 + 4\varepsilon) R_0^2}{6\sigma \kappa H} \approx 9 \text{ s} \quad (75)$$

因此,空化核将在几秒钟内坍塌。

C.2 本题要求推导出力学平衡条件和扩散平衡条件,并确定气腔会一直保留在裂缝中不消失的条件。

平衡条件为

$$p_v + q = p_\infty \pm \frac{2\sigma}{R} \quad \text{和} \quad u = Hq \quad (76)$$

正好对应凹液面的情况,表面张力通过产生附加压强驱动气体扩散排出裂缝;负号对应凸液面的情况,附加压强抑制气体排出。假设初始时气体分压 q 较高,随着扩散导致气腔体积缩小, q 逐渐降低。在某一时刻将达到扩散平衡。因此,当水表面为凸液面时,气腔不会消失,即满足几何条件

$$\pi + \alpha < 2\theta \quad (77)$$

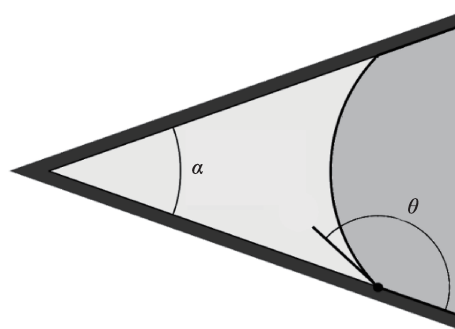


图2 锥形裂缝

C部分探究了气泡溶解过程与裂缝气腔稳定性问题:基于菲克定律与亨利定律定量估算溶解时间;结合接触角与孔径角的几何约束分析气腔稳定性条件。题目难度适中且与实际应用结合紧密。

封面、封底说明:

位于美国基特峰天文台的国际大型合作项目“暗能量光谱巡天”(DESI),通过构建迄今最大规模的星系与类星体三维空间分布图谱,实现了对暗能量状态方程的高精度测量,为探索超越标准宇宙学模型(Λ CDM)的新物理现象提供了关键线索。该研究首次以超过 4σ 的统计置信度发现,暗能量的状态

方程参数(w)随时间发生演化,并且在演化过程中穿越了 $w = -1$ 这一对应于宇宙学常数的理论界限。DESI所获得的这一新结果与张新民团队于2004年提出的Quintom(精灵)暗能量模型的理论预言相一致。(© The Regents of the University of California, Lawrence Berkeley National Laboratory)

(李虹/供稿)

封二说明:

强流重离子加速器装置(简称HIAF)是国家“十二五”重大科技基础设施建设项目,由中国科学院近代物理研究所建设。项目选址广东省惠州市,2018年12月开工启动,建设周期7年。

强流重离子加速器装置将建设一台具有国际领先水平的下一代强流重离子加速器装置,具备产生极端远离稳定线核素的能力,可提供国际上峰值流强最高的低能重离子束流、最高能量达4.25吉电子伏每核子(GeV/u)的脉冲重离子束流和国际上测

量精度最高的原子核质量测量谱仪,为鉴别新核素、扩展核素版图、研究弱束缚核结构和反应机制、特别是精确测量远离稳定线短寿命原子核质量提供国际领先的研究条件。

截至目前,HIAF工艺设备已全部安装完成,核心关键技术设备达到设计指标,正在开展全装置联调联测。计划2025年10月开展全装置束流调试,11月开展工艺测试验收,2026年初完成国家验收。

(HIAF工程部/供稿)

她用物理的情趣,引我们科苑揽胜; 她用知识的力量,助我们奋起攀登!

欢迎投稿,欢迎订阅

《现代物理知识》杂志隶属于中国物理学会,由中国科学院高能物理研究所主办,是我国物理学领域的中、高级科普性期刊。

科技创新、科学普及是实现创新发展的两翼。《现代物理知识》旨在普及科学知识、弘扬科学精神,设有物理知识、物理前沿、科技经纬、科学源流、教学参考、中学园地、科学书屋和科苑快讯等栏目。诚邀在物理学及相关领域工作的科技、教育和科普等方面的专家学者,以公众喜闻乐见的文字,深入浅出、图文并茂地与读者分享现代物理知识、科学前沿成果和大科学装置进展等精彩故事,共襄“两翼齐飞”之盛举。投稿时请将稿件的 Word 文档发送至本刊电子信箱 mp@mail.ihep.ac.cn,并将联系人姓名、详细地址、邮政编码,以及电话、电子信箱等联系方式附于文章末尾。

所投稿件一经本刊录用,作者须将该篇论文各种介质、媒体的版权转让给编辑部所有,并签署《现代物理知识》版权转让协议书(全部作者签名),如不接受此协议,请在投稿时予以声明。来稿一经发表,将一次性酌情付酬,以后不再支付其他报酬。

2025 年《现代物理知识》每期定价 15 元,全年 6 期 90 元,欢迎新老读者订阅。

需要往期杂志的读者,请按下列价格付款:

2010~2021 年单行本每期 10 元;2022~2024 年单行本每期 15 元;2010~2021 年合订本每本 60 元,2022~2023 年合订本每本 90 元。

订阅方式

(1) 邮局订阅 邮发代号:2-824。

(2) 编辑部订阅(请通过银行转账到以下账号,并在附言中说明“现代物理知识**年**期”)

名称:中国科学院高能物理研究所

开户行:工商银行北京永定路支行

账号:0200004909014451557

(3) 科学出版社期刊发行部:联系电话 010-64017032 64017539;

(4) 网上购买:搜淘宝店、微店店铺名称:中科期刊;淘宝、微信购买二维码:



淘宝网购刊



微信购刊

科苑快讯

科学家发现一个让你跑得更快的小窍门

一些精挑细选并以环境为中心的提示,可以显著提高跑步速度,证明语言比练习更有效。比如“推开地面”这样的隐喻,利用了大脑想象力,从而可以让你更快地奔跑。

英国埃塞克斯大学(University of Essex)与托特纳姆热刺精英学院(Tottenham Hotspur's elite academy)合作,发现注重环境的生动短语使青少年运动员的 20 米短跑成绩提高了约 3%。为什么这很重要?因为这种闪电加速通常会决定前锋是否会顺利避开防守球员并攻入球门。

埃塞克斯大学运动科学家莫兰(Jason Moran)博士发现,当年轻运动员把注意力集中在周围环境而非自

身机能时,可以跑得更快。告诉运动员“像喷气式飞机一样起飞”,可使其在脑海中形成清晰画面,让身体自由流畅地运动。而且这些话语对其表现,有立竿见影的明显影响。莫兰说,通过简单类比,教师和家长就可能最大限度地发挥孩子的运动潜能。



(高凌云编译自 2025 年 7 月 1 日 SciTechDaily 网站)