



留声机转盘上滚动的球 ——23届亚洲物理奥林匹克竞赛 (APhO)第二题答案

黄志强¹ 宋 峰²

(1. 江西科技学院附属中学; 2 南开大学物理科学学院 300071)

本文给出第23届亚洲物理奥林匹克竞赛(APhO2023)理论赛题第二题的解答,是在官方解答基础上给出的,但是更加详细完整。该题考察了一个在水平转台上滚动的球,在不同条件下,深入探讨其运动和轨迹特性。所给条件的复杂性逐步递增,从转台角速度恒定的简单情形,到转台可自由转动,再到考虑球的特殊密度分布和外部磁场的作用,层层递进。这种研究不仅能加深我们对基础物理原理的理解,如牛顿运动定律、角动量守恒、洛伦兹力等,还能锻炼综合运用多学科知识解决实际问题的能力。它为进一步探索微观粒子在旋转和电磁场环境中的运动规律提供了宏观层面的类比和思考基础,在天体物理、微观物理实验装置设计等领域有着潜在的应用价值。

A 部分: 匀角速度转盘上的球[1.5分]

A.1 [0.1分]

球在圆盘上做纯滚动,故球心 $\vec{v}_b$ 相对于转盘接触点的速度为:

$$\vec{v}_b = \vec{\omega} \times (r\hat{z}) \quad (1)$$

球心相对于实验室的速度,是转台接触点的速度与球相对于转台速度的矢量和:

$$\vec{v} = \Omega\hat{z} \times \vec{R} + \vec{v}_b \quad (2)$$

$$\vec{v} = \Omega\hat{z} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \hat{z}r \quad (3)$$

A.2 [0.2分]

球受到转盘摩擦力 $\vec{F}$,摩擦力产生的力矩为 $\vec{\tau}$,根据牛顿第二定律和转动定理,

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} \quad (4)$$

$$\vec{\tau} = (-r\hat{z}) \times \vec{F} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (5)$$

方程(3)两边对时间求导:

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (r\hat{z}) \quad (6)$$

联立式(4)-(6),得:

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} - \frac{mr^2}{I} (\hat{z} \times \dot{\vec{v}}) \times \hat{z} \quad (7)$$

由于 $\vec{v}$ 、 $\dot{\vec{v}}$ 、 $\hat{z}$ 三个矢量正交,

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} - \frac{mr^2}{I} \dot{\vec{v}} \quad (8)$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\Omega}{1 + mr^2/I} \hat{z} \times \vec{v} \quad (9)$$

A.3 [0.2分]

已知加速度和初速度,可以通过积分求速度。根据圆周运动 $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$,由式(9)可知,球心的运动

轨迹是圆,其中心对应的角速度为 $\frac{\Omega}{1 + mr^2/I}$ 。

式(9)两边对时间积分得:

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{\Omega}{1 + mr^2/I} \hat{z} \times (\vec{R} - \vec{R}_0) \quad (10)$$

$$\vec{v} = \frac{\Omega}{1 + mr^2/I} \hat{z} \times (\vec{R} - \vec{R}_0) + \vec{v}_0 \quad (11)$$

A.4 [0.5分]

根据圆周运动 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,我们可以把式(11)化简为:

$$\vec{v} = \frac{\Omega}{1 + mr^2/I} \hat{z} \times (\vec{R} - \vec{R}_0 - \frac{1 + mr^2/I}{\Omega} \hat{z} \times \vec{v}_0) \quad (12)$$

由A.3我们知道球做圆周运动的轨道半径为 R_t ,球心位矢图1所示, O 点为转盘转轴位置,圆心位于 O_1 点(相对桌面固定),

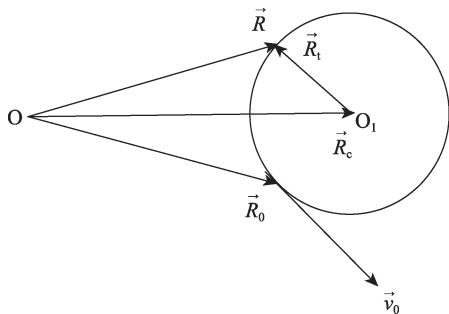


图1

$$O_1\text{位矢 } \vec{R}_c = \vec{R}_0 + \frac{1 + mr^2/I}{\Omega} \hat{z} \times \vec{v}_0 \quad (13)$$

球运动的圆轨迹半径:

$$R_t = |\vec{R}_0 - \vec{R}_c| = \frac{1 + mr^2/I}{\Omega} |\hat{z} \times \vec{v}| = \frac{1 + mr^2/I}{\Omega} v_0 \quad (14)$$

另解:由式(9)可知,球心圆周运动的角速度

$$\vec{\omega}_c = \frac{\Omega}{1 + mr^2/I} \hat{z} \quad (15)$$

$$\text{根据匀速圆周运动 } \vec{v}_0 = \vec{\omega}_c \times \vec{R}_t \quad (16)$$

$$\text{故 } R_t = \frac{1 + mr^2/I}{\Omega} v_0 \quad (17)$$

A.5 [0.5分]

若球做完整圆周运动,转盘也做完整圆周运动,球可回到初始接触点。

因质量分布均匀的球体,其转动惯量为:

$$I = \frac{2mr^2}{5} \quad (18)$$

因此,球心的角速度是:

$$\omega_c = \frac{2}{7} \Omega \quad (19)$$

球做一次完整圆周运动的时间为:

$$t = \frac{14\pi}{\Omega} \quad (20)$$

此时转盘恰好完成7次完整圆周运动,球恰好返回转盘上的初始点。

在一些特殊情况下,时间更短。若 $R_t = R_0$,在转

盘形成一圈之前起点与球交叉。球圆周运动的弦长和转盘接触点圆周运动弦长相等:

$$2R_0 \sin\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) = 2R_t \sin\left(\frac{2\pi - \Omega t}{2}\right) \quad (21)$$

因此:

$$t = \frac{2\pi}{\omega_c + \Omega} = \frac{14\pi}{9\Omega} \quad (22)$$

A部分先根据球做纯滚运动求出速度,然后速度对时间求导得到加速度,在求导过程中应注意对所有变量都要求导。再利用初始条件,加速度对时间积分,便可求得速度随位置变化的关系。从A.2可知球运动的轨迹是一个圆,利用 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,画矢量图可得出轨迹半径 R_t 。A.5中球回到转盘的初始位置,球做圆周运动角速度小于转盘角速度,求出球和转盘圆周运动周期的最小公倍数,即球回到初始位置的最小时间。题目已给出当 $R_t = R_0$ 时,转盘和球做相向运动,经历更短时间回到出发点。

B部分:自由旋转转盘上滚动的球 [4.0分]

转盘自由旋转的过程中,垂直轴没有摩擦,系统角动量是守恒的,只有球与转盘间的摩擦力使球和转盘的运动状态发生变化。

B.1 [0.2分]

球只受转盘的摩擦力,对球进行分析,根据角动量定理:

$$\vec{r} \times \vec{F} = I \dot{\vec{\omega}} \text{ 即 } \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (23)$$

两边积分后,再乘以 $\hat{z}$,得到:

$$\frac{mr}{I} (\vec{v} - \vec{v}_0) = \vec{\omega} \times \hat{z} - \vec{\omega}_0 \times \hat{z} \quad (24)$$

$$\text{因球做无滑滚动, } \vec{v} = \Omega \hat{z} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \hat{z}r \quad (25)$$

$$\text{根据初始条件: } \vec{v}_0 = \Omega_0 \hat{z} \times \vec{R}_0 + \vec{\omega}_0 \times \hat{z}r \quad (26)$$

代入式(24)可得:

$$\vec{v} = \frac{I}{I + mr^2} \hat{z} \times (\Omega \vec{R} - \Omega_0 \vec{R}_0) + \vec{v}_0 \quad (27)$$

求导得加速度:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{I}{I + mr^2} \hat{z} \times (\dot{\Omega}(t) \vec{R} + \Omega \vec{v}) \quad (28)$$

B.2 [0.6 分]

对转盘进行研究,转盘受球的摩擦力,根据角动量定理:

$$I_d \dot{\Omega} \hat{z} = -\vec{R} \times m \vec{v} \quad (29)$$

代入式(28):

$$I_d \dot{\Omega} \hat{z} = -m \vec{R} \times \left(\frac{I}{I + mr^2} \hat{z} \times (\dot{\Omega} \vec{R} + \Omega \vec{v}) \right) \quad (30)$$

两边点乘 $\hat{z}$ 以消去 $\hat{z}$:

$$I_d \dot{\Omega} = -\frac{mI}{I + mr^2} (\dot{\Omega} R^2 + \Omega (\vec{v} \cdot \vec{R})) \quad (31)$$

根据方程(27)得:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{R} &= (\vec{v}_0 + \frac{I}{I + mr^2} \hat{z} \times (\Omega \vec{R} - \Omega_0 \vec{R}_0)) \cdot \vec{R} = \\ &= (\vec{v}_0 - \frac{I}{I + mr^2} \Omega_0 \hat{z} \times \vec{R}_0) \cdot \vec{R} \end{aligned} \quad (32)$$

与式(31)联立求解,得

$$\begin{aligned} (I_d + \frac{mI}{I + mr^2} R^2) \dot{\Omega} &= -\frac{mI}{I + mr^2} \Omega \\ &= (\vec{v}_0 - \frac{I}{I + mr^2} \Omega_0 \hat{z} \times \vec{R}_0) \cdot \vec{R} \end{aligned} \quad (33)$$

我们可以把该方程改写成一个更简单的形式:

$$\dot{\Omega} = -\frac{\frac{\alpha \Omega}{r^2} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{c})}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \quad (34)$$

$$\text{其中 } \alpha \equiv \frac{I}{I + mr^2} \quad (35)$$

$$\delta \equiv \frac{I_d}{mr^2} \quad (36)$$

$$\vec{c} \equiv \vec{v}_0 - \alpha \Omega_0 \hat{z} \times \vec{R}_0 \quad (37)$$

B.3 [0.6 分]

可以根据转盘的角加速度求转盘的角速度,而转盘的角速度 Ω 是关于 R 的函数,我们要消去 $\vec{v}$, $\vec{c}$,都用 R 表示。依题意,球的速度可以写成:

$$\vec{v} = \alpha \Omega \hat{z} \times \vec{R} + \vec{c} \quad (38)$$

又因为:

$$\vec{v} \cdot \vec{R} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{R} \cdot \vec{R})}{dt} = \frac{1}{2} \dot{R}^2 = \vec{R} \cdot \vec{c} \quad (39)$$

将其代入式(34),得到:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \frac{d(\alpha R^2 / r^2)}{dt} \quad (40)$$

积分得:

$$\ln \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^2 = \ln \left(\frac{\delta + \alpha R_0^2 / r^2}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \right) \quad (41)$$

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 \frac{\delta + \alpha R_0^2 / r^2}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \quad (42)$$

B.4 [0.1 分]

根据式(42),当 $R=0$ 时,即当球穿过转盘中心时, Ω 取最大值:

$$\Omega_{\max} = \Omega_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha R_0^2}{\delta r^2}} \quad (43)$$

B.5 [2.5 分]

现在我们来确定球的运动轨迹。沿 $\hat{z}$ 方向,球和盘总角动量守恒,可写为:

$$M_z \hat{z} = I_d \Omega \hat{z} + m \vec{R} \times \vec{v} + I \omega_z \hat{z} \quad (44)$$

由于作用于球的摩擦力没有 $\hat{z}$ 方向扭矩, ω_z 是恒定的。定义以下的守恒量:

$$L \hat{z} = I_d \Omega \hat{z} + m \vec{R} \times \vec{v} = I_d \Omega_0 \hat{z} + m \vec{R}_0 \times \vec{v}_0 \quad (45)$$

根据式(38),把 $\vec{v}$ 代入:

$$\vec{R} \times \vec{v} = \vec{R} \times (\alpha \Omega \hat{z} \times \vec{R} + \vec{c}) \quad (46)$$

$$\vec{R} \times \vec{v} = \alpha \Omega R^2 \hat{z} + \vec{R} \times \vec{c} \quad (47)$$

代入式(45),得到:

$$L \hat{z} = I_d \Omega \hat{z} + \alpha \Omega m R^2 \hat{z} + m \vec{R} \times \vec{c} \quad (48)$$

$$\text{两边点乘 } \hat{z} \text{ 化简得: } \Omega = \frac{L - m \hat{z} \cdot (\vec{R} \times \vec{c})}{I_d + \alpha m R^2} \quad (49)$$

因为沿 $\vec{c}$ 的方向为 x 轴,沿 $\hat{z} \times \vec{c}$ 的方向为 y 轴,因为 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$,代入可知:

$$\Omega = \frac{L/mr^2 + cy/r^2}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \quad (50)$$

结合等式(42),可以得到:

$$\Omega_0^2 \frac{\delta + \alpha R_0^2 / r^2}{\delta + \alpha R^2 / r^2} = \left(\frac{L/mr^2 + cy/r^2}{\delta + \alpha R^2 / r^2} \right)^2 \quad (51)$$

$$\Omega_0^2(\delta + \alpha R_0^2/r^2)(\delta + \alpha R^2/r^2) = (L/mr^2 + cy/r^2)^2 \quad (52)$$

为了简洁起见,可设:

$$k \equiv \Omega_0^2(\delta r^2 + \alpha R_0^2) \quad (53)$$

$$\lambda \equiv L/m \quad (54)$$

在笛卡尔坐标 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ 中展开,式(52)可化简为:

$$k\alpha(\delta r^2 + \alpha(x^2 + y^2)) - (\lambda^2 + 2\lambda cy + c^2 y^2) = 0 \quad (55)$$

$$k\alpha^2 x^2 + (k\alpha^2 - c^2)y^2 - 2\lambda cy = \lambda^2 - k\alpha\delta r^2 \quad (56)$$

球的运动轨迹为圆锥曲线,由于 $k\alpha^2 > 0$,其轨迹由 $k\alpha^2 - c^2$ 的符号决定:

若 $k\alpha^2 > c^2$ (57) 球的运动轨迹为椭圆

若 $k\alpha^2 = c^2$ (58) 球的运动轨迹为抛物线

若 $k\alpha^2 < c^2$ (59) 球的运动轨迹为双曲线

B部分对球列出动力学方程和转动方程,可以较快得到球的速度和加速度。对转盘列转动方程可以得出转盘的角加速度,根据题目所设的字母化简能更好地解出角速度,在B.3的化简过程中,会用到比较多的矢量运算。在B.5中,把 $\vec{R}$ 矢量按笛卡尔坐标 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ 展开,从而得到球的运动轨迹圆锥曲线。

C 部分:磁场中转盘上滚动的球 [4.5分]

C.1 [0.5分]

根据题意,球被填满到其半径的一半,转动惯量变为:

$$I = \frac{mr^2}{10} \quad (60)$$

球在运动过程中,受到摩擦阻力和洛伦兹力,在 $\hat{z}$ 方向匀强磁场 B 中,球表面均匀带电,面密度为 $\rho = \frac{Q}{4\pi r^2}$,球运动的动力学方程如下:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_f + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (61)$$

$$I\dot{\vec{\omega}} = -r\hat{z} \times \vec{F}_f + \vec{\tau}_s \quad (62)$$

其中,带电球体旋转所产生的磁力矩为 $\vec{\tau}_s =$

$$\frac{Qr^2}{3}\vec{\omega} \times \vec{B}, F_f \text{ 为摩擦力。}$$

磁力矩 τ_s 的计算方法如下:

磁力矩:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (63)$$

球面均匀分布电荷 Q ,取一圆环面,该圆环面的磁矩为

$$d\vec{\mu} = dI \cdot \vec{S} = \frac{dQ}{2\pi/\vec{\omega}} \cdot S \quad (64)$$

$$\text{圆环面带电: } dQ = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \quad (65)$$

面积 $S = \pi(R \cdot \sin\theta)^2$,所以球的磁矩为

$$\vec{\mu} = \int_0^\pi d\vec{\mu} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{Q}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \sin\theta \cdot \frac{\vec{\omega}}{2\pi} \cdot \pi(R \sin\theta)^2 d\theta \quad (66)$$

计算得到:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{3}QR^2\vec{\omega} \quad (67)$$

球的磁力矩:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{1}{3}QR^2\vec{\omega} \times \vec{B} \quad (68)$$

C.2 [0.5分]

要求加速度表达式,我们结合动力学方程,消去角速度和角加速度,即可得出。

小球做无滑滚动,我们知道:

$$\vec{v} = \Omega\hat{z} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \hat{z}r \quad (69)$$

两边求导:

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \hat{z}r \quad (70)$$

两边叉乘 $\hat{z}$:

$$\dot{\vec{\omega}}r = \Omega\vec{v} - \dot{\vec{v}} \times \hat{z} \quad (71)$$

联立式(61)、(62)、(70)、(71),可以得到:

$$I\dot{\vec{\omega}} = -r\hat{z}(\dot{m}\vec{v} - Q\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{Qr^2}{3}\vec{\omega} \times \vec{B} \quad (72)$$

$$I(\Omega\vec{v} + \hat{z} \times \dot{\vec{v}}) = -r^2\hat{z} \times (\dot{m}\vec{v} - Q\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{Qr^2 B}{3}(\vec{v} - \Omega\hat{z} \times \vec{R}) \quad (73)$$

$$(I + mr^2)\dot{\vec{v}} = \left(\frac{4Qr^2 B}{3} - I\Omega\right)\vec{v} \times \hat{z} - \frac{Qr^2 B}{3}\Omega\vec{R} \quad (74)$$

依题意,式(74)可以写成:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta \vec{R} = 0 \quad (75)$$

其中:

$$\beta \equiv \frac{Qr^2 B}{3(I + mr^2)} \quad (76)$$

$$\gamma \equiv \frac{4Qr^2 B - 3I\Omega}{3(I + mr^2)} = \frac{4\beta}{\Omega} - \alpha\Omega \quad (77)$$

C.3[1.0分]

为简化问题,取 $R=1\text{ m}$, $\Omega = 1\text{ s}^{-1}$,这样就可以处理无单位的量。根据 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$,把式(75)展开,有以下无单量纲方程:

$$\ddot{x} - \gamma\dot{y} + \beta x = 0 \quad (78)$$

$$\ddot{y} + \gamma\dot{x} + \beta y = 0 \quad (79)$$

根据题目要求,代入以下坐标变换

$$x(t) = \rho(t)\cos(\eta(t)) \quad (80)$$

$$y(t) = \rho(t)\sin(\eta(t)) \quad (81)$$

依题意, $\sin\eta$ 、 $\cos\eta$ 、 $\dot{\rho}$ 、 $\dot{\eta}$ 的系数均为 0

$$\text{即: } \ddot{\rho} + (\beta - \gamma\dot{\eta} - \dot{\eta}^2)\rho = 0 \quad (82)$$

$$\dot{\rho}(\gamma + 2\dot{\eta}) = 0 \quad (83)$$

容易看出这相当于 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 项消失。由此发现:

$$\eta = -\frac{\gamma}{2}t + \phi \quad (84)$$

$$\beta' \equiv \beta - \gamma\dot{\eta} - \dot{\eta}^2 = \beta + \frac{\gamma^2}{4} \quad (85)$$

显然,对于 $\ddot{\rho} + \beta'\rho = 0$, $\rho(t)$ 有三种不同的行为:

当 $\beta' > 0$ 时 (86) 谐振荡

当 $\beta' < 0$ 时 (87) 指数衰减

$\beta' = 0$ (88) 线性增长

C.4 [0.9分]

$$\text{当 } \beta' = 0, \text{ 即 } \beta = -\frac{\gamma^2}{4} \quad (89)$$

因此, $\ddot{\rho} = 0$, 可知 $\rho = A + Dt$, 其中 A 和 D 是要确定的常数。

由初始条件

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, y(0) = 0, \\ v_x(0) &= \dot{x}|_{t=0} = 1, v_y(0) = \dot{y}|_{t=0} = -1, \end{aligned} \quad (90)$$

得到:

$$A = 1, D = 1, \gamma = 2, \beta = -1 \quad (91)$$

则坐标的解是:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1+t)\cos(t) \\ y(t) &= -(1+t)\sin(t) \end{aligned} \quad (92)$$

由此,可以计算出 R 的长度:

$$R^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = (1+t)^2 \quad (93)$$

使用 β 和 γ 的定义,可得:

$$\Omega = -11 \pm \sqrt{77} \quad (94)$$

由于 $\Omega < 0$ 和 $B > 0$ 的两个解决方案($\vec{B}$ 是在 $\hat{z}$ 方向上的),从 $\beta < 0$ 中我们可以看到 $Q < 0$ 。

C.5 [1.6分]

由式(92)可知, $\omega = 1\text{ s}^{-1}$, 故每转一圈, 经历时间 $t = 2\pi$, $|\vec{R}|$ 变化 ΔR , 每旋转一周时, R 的变化 $\Delta R = \Delta t = 2\pi$ 。旋转 $N(N \gg 1)$ 周后, $R^2 = (1+t)^2$ 。

由式(75)可知:

$$\dot{\vec{v}} - \gamma\vec{v} \times \hat{z} = -\beta\vec{R} \quad (95)$$

两边点乘 $\vec{v}$ 可得:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta\vec{v} \cdot \vec{R} \quad (96)$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = -\beta\vec{R} \cdot \vec{v}dt \quad (97)$$

积分并近似得:

$$v^2 - v_0^2 = -\beta(R^2 - R_0^2) \approx t^2 \quad (98)$$

球运动的平动动能的总变化和每次旋转的变化分别为:

$$\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \beta\vec{R} \cdot \vec{R} \quad (99)$$

$$\Delta K = \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \left(\frac{R^2 - R_0^2}{2} \right) = \frac{t^2}{2} \quad (100)$$

$$\Delta K_N = \frac{v_{N+1}^2 - v_N^2}{2} = \Delta \left(\frac{R^2}{2} \right) = t\Delta t = 4\pi^2 N \quad (101)$$

接下来我们计算转动动能,由式(69)得到:

$$\omega^2 = v^2 + \Omega^2 R^2 + 2\Omega\vec{v} \cdot (\hat{z} \times \vec{R}) \quad (102)$$

根据初始条件 $\vec{v}_0 \cdot (\hat{z} \times \vec{R}_0) = -v_0 R_0$, N 圈后, $\vec{v}$ 和 $\vec{R}$ 满足 $\vec{v} \cdot (\hat{z} \times \vec{R}) = -vR$ 。由于 $\Omega < 0$, 所以 Ω 写成 $|\Omega|$ 。球的转动动能及其变化是:

$$K_s = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I(v^2 + \Omega^2 R^2 + 2|\Omega|vR)}{2} \quad (103)$$

$$\Delta K_s = \frac{I((v^2 - v_0^2 + \Omega^2(R^2 - R_0^2)) + 2|\Omega|(vR - v_0R_0))}{2} \quad (104)$$

球的总动能和动能变化:

$$\Delta E = \frac{I(\omega^2 - \omega_0^2)}{2} + \Delta K \cong \frac{I(v^2 + \Omega^2 R^2 + 2|\Omega|vR)}{2} + \frac{t^2}{2} \quad (105)$$

$$\Delta E = \frac{t^2}{2} \left(\frac{(1 + |\Omega|^2)}{11} + 1 \right) \quad (106)$$

$$\Delta E_N = \frac{I(\omega_N^2 - \omega_{N-1}^2)}{2} + \Delta K_N \quad (107)$$

$$\Delta E_N = 4\pi N \left(\frac{(1 + |\Omega|^2)}{11} + 1 \right) \quad (108)$$

$$|\Omega| = |11 \pm \sqrt{77}| \quad (109)$$

球心运动轨迹的草图如图2所示。

C部分的难度比较大,C.1对球列动力学方程和转动方程,C.2得出线性加速度方程后,把 $\vec{R}$ 矢量按笛卡尔坐标 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ 展开代入,并按题目要求把 x, y 写为参数方程形式。C.4代入初始条件得出转盘角速度 Ω ,C.5中求动能的变化分为两平动动能和转动动能。

本题围绕转台上滚动的球展开了全面而深入的研究,通过对不同条件下球的运动和轨迹的分析,让学生充分理解物理原理在实际问题中的应用。题目综合性强,涵盖了经典力学中的运动学、动力学、转动以及电磁学中的洛伦兹力等多个知识点,有效考查了学生对多学科知识的综合运用能力。题目设置从简单到复杂,层层递进,符合学生的认知规律,有助于逐步引导学生深入思考,培养逻辑思维能力。问题设计具有启发性,每一问都紧密相连,前一问的结果往往是后一问的基础,促使学生形成系统的解题思路。

部分问题计算过程较为繁琐,涉及大量矢量运算和积分运算,对学生的数学基础要求较高,可能

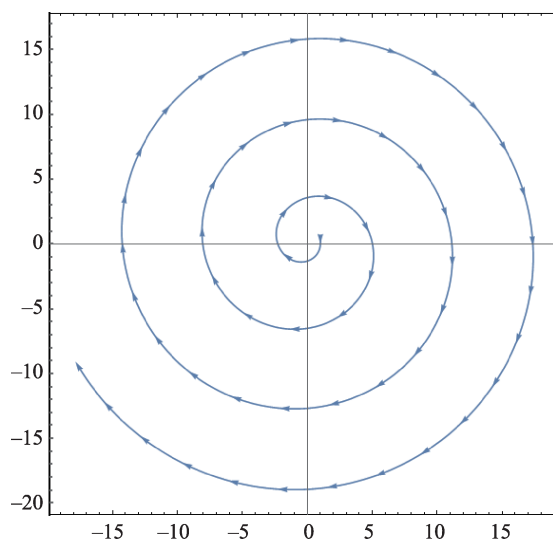


图2

会使一些学生在计算过程中花费过多时间,影响对物理原理的深入理解。题目条件较多,在不同部分切换时,学生需要快速整合信息,这对学生的信息处理能力提出了较高挑战,容易造成学生思维混乱。本题解答过程主要是矢量运算,三个部分都在地面系解运动学问题,没有变换参考系,不会涉及牵连加速度和虚拟力的问题,题目的难点在于求导和矢量运算的反复使用。本题也为进一步研究物体在复杂环境下的运动提供了范例,引导学生在今后的学习中注重知识的综合运用和思维能力的培养,提高解决实际问题的能力。

