



2021年亚洲物理奥林匹克竞赛理论第二题解答

——光线追踪和纠缠光的产生

房 颐¹ 宋 峰²

(1. 南京师范大学附属中学 210003; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

A 部分. 在各向同性电介质中的光传播

A.1

由 $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} = \omega \mu_0 \vec{H}$ 和 $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$ 可得

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}, \quad (1.1)$$

利用已给公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ 可得

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2 \vec{E}, \quad (1.2)$$

由 $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ 和 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, 结合(1.1)、(1.2)式可得到

$$-k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon \vec{E}, \quad (1.3)$$

相速度由 $\frac{d}{dt}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = 0$ 确定, 所以

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\omega}{k} \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} \hat{k}, \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}. \quad (1.4)$$

A.2

由 $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c}{n}$ 可得

$$n = c \sqrt{\mu_0 \epsilon}. \quad (1.5)$$

A.3

注意到由坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 确定的能流方向与 \vec{k} 的方向相同。电磁场能量密度 $u = u_e + u_m$, 其中电场能量密度 $u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$, 磁场能量密度 $u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 。

由 $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$ 可得 $\vec{D} = -\frac{1}{v_p} \hat{k} \times \vec{H}$, 所以

$$u_e = -\frac{1}{2v_p} \vec{E} \cdot (\hat{k} \times \vec{H}) = \frac{1}{2v_p} \hat{k} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}), \quad (1.6)$$

类似地, 由 $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ 可得

$$u_m = \frac{1}{2v_p \mu_0} \vec{B} \cdot (\hat{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{2v_p} \hat{k} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}), \quad (1.7)$$

所以

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{v_p} \hat{k} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{S}{v_p}, \quad (1.8)$$

由此可得

$$v_r = \frac{S}{u} = v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}. \quad (1.9)$$

【点评】A部分讨论平面电磁波在各向同性介质中的传播规律, 从结果可以看出此处波矢 \vec{k} 的方向和坡印廷矢量(能流密度矢量) \vec{S} 的方向相同, 相速度 v_p 和能流速度 v_r 是相同的。

B 部分. 在单轴电介质中的光传播

B.1

由(1.1)和(1.2)式可得 $(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}$, 将 $\vec{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\vec{D} = (\epsilon E_x, \epsilon E_y, \epsilon' E_z)$ 代入可得

$$(k \sin \theta E_x + k \cos \theta E_z)k(\sin \theta, 0, \cos \theta) - k^2(E_x, E_y, E_z) = -\omega^2 \mu_0(\epsilon E_x, \epsilon E_y, \epsilon' E_z), \quad (2.1)$$

考虑到 $k = n \frac{\omega}{c}$, $n_o = c \sqrt{\mu_0 \epsilon}$ 和 $n_e = c \sqrt{\mu_0 \epsilon'}$, 将上式写成分量式

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{n_o^2}{n^2}\right)E_y = 0 \\ \left(\frac{n_o^2}{n^2} - \cos^2\theta\right)E_x + \cos\theta \sin\theta E_z = 0, \\ \cos\theta \sin\theta E_x + \left(\frac{n_c^2}{n^2} - \sin^2\theta\right)E_z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

这是关于 (E_x, E_y, E_z) 的齐次方程组,有非零解的条件是系数行列式等于零,即

$$\left(1 - \frac{n_o^2}{n^2}\right)\left[\left(\frac{n_o^2}{n^2} - \cos^2\theta\right)\left(\frac{n_c^2}{n^2} - \sin^2\theta\right) - \sin^2\theta \cos^2\theta\right] = 0. \quad (2.3)$$

显然,对于一般的角 θ , n 有两组解:

$$(1) 1 - \frac{n_o^2}{n^2} = 0, \text{ 即} \quad n = n_o, \quad (2.4)$$

此解即为o光解。

在这种情况下, $E_x = E_z = 0$, \vec{E} 平行于y轴。

由 $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ 和 $\vec{k} \times \mu_o \vec{B} = -\omega \vec{D}$ 可得 \vec{B} 和 \vec{D} 的方向

$$\vec{B} = \pm \hat{k} \times \hat{y} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta), \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = -\hat{k} \times \vec{B} = \pm(0, 1, 0) = \pm \hat{y}. \quad (2.6)$$

$$(2) \left(\frac{n_o^2}{n^2} - \cos^2\theta\right)\left(\frac{n_c^2}{n^2} - \sin^2\theta\right) - \sin^2\theta \cos^2\theta = 0,$$

解得

$$n = \frac{n_o n_c}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_c^2 \cos^2\theta}}, \quad (2.7)$$

此解即为e光解。

在这种情况下, $E_y = 0$, \vec{E} 位于xy平面内。

由 $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ 和 $\vec{k} \times \mu_o \vec{B} = -\omega \vec{D}$ 可得 \vec{B} 和 \vec{D} 的方向

$$\vec{B} = \pm \hat{y}, \quad (2.8)$$

$$\vec{D} = \pm \hat{y} \times \hat{k} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta). \quad (2.9)$$

显然,在 $\theta=0$ 处, $n=n_o$, 此方向仅允许一个折射率值,该方向就是光轴的方向。

B.2

(1) 对于 $n=n_o$, \vec{E} 和 \vec{D} 都平行于y轴, $\hat{E} = \pm \hat{y}$, 这是寻常光,

$$\tan\alpha = 0. \quad (2.10)$$

$$(2) \text{ 对于 } n = \frac{n_o n_c}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_c^2 \cos^2\theta}} \quad (n \neq n_o),$$

$E_y = 0$ 。

将 n 的解代回关于 E_x 和 E_z 的方程(2.2)式,可得

$$\frac{n_o^2}{n_c^2} \sin\theta E_x + \cos\theta E_z = 0, \quad (2.11)$$

所以 \vec{E} 位于xy平面内,方向为

$$\hat{E} = \pm \frac{(-n_c^2 \cos\theta, 0, n_o^2 \sin\theta)}{\sqrt{n_c^4 \cos^2\theta + n_o^4 \sin^2\theta}}. \quad (2.12)$$

所以, \vec{E} 与 \vec{k} 不垂直, \vec{E} 与 \vec{D} 、 \vec{k} 一起位于xz平面内。这是非寻常光。

由于 $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$, 所以 \vec{D} 与 \vec{k} 垂直, $\hat{D} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta)$ 。取 $\hat{B} = \hat{y}$, 对于给定的 θ 角,当 $n_c < n_o$ 时 \vec{E} 与 \vec{D} 方向的相对关系如图1所示。

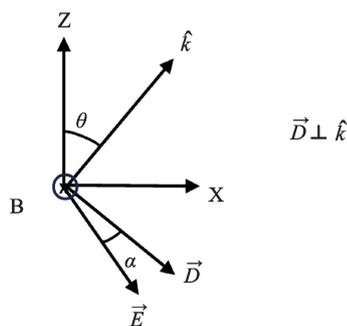


图1

将 \vec{E} 和 \vec{D} 相对于x轴的夹角分别记为 θ_1 和 θ_2 ,有

$$\tan\theta_2 = -\tan\theta, \quad \tan\theta_1 = -\frac{n_c^2}{n_o^2} \tan\theta, \quad (2.13)$$

所以

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{(n_o^2 - n_c^2) \tan\theta}{n_c^2 + n_o^2 \tan^2\theta}. \quad (2.14)$$

当 $n_c > n_o$ 时结果不变,此时 $\tan\alpha < 0$, 说明 \vec{E} 与 \vec{D} 方向的相对关系与图中相反。

B.3

问题具有关于z轴的旋转对称性,在z轴和 \vec{k} 确定的平面中,可以将矢量分解为 $\vec{k} = k_z \hat{z} + k_\perp \hat{k}_\perp$, $\vec{E} = E_z \hat{z} + E_\perp \hat{k}_\perp$, 其中 \hat{k}_\perp 垂直于 \hat{z} 。显然有

$$k_z = k \cos \theta, \quad k_{\perp} = k \sin \theta, \quad k_z = E \cos \theta, \quad E_{\perp} = E \sin \theta, \quad (2.15)$$

所以

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{k}_{\perp}. \quad (2.16)$$

写出此时(1.1)式($\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}$)的分量式, 所得方程除了将 E_x 替换为 E_{\perp} 外均与(2.1)式相同。所以只需要将 B.1 和 B.2 问答案中的 \hat{x} 替换为

$$\hat{k}_{\perp} = \frac{\hat{k} - \cos \theta \hat{z}}{\sin \theta} \text{ 即可。}$$

(1) 对于 $n = n_0$, 这是寻常光,

$$\hat{E} = \pm \frac{\hat{k} \times \hat{z}}{\sin \theta}. \quad (2.17)$$

(2) 对于 $n = \frac{n_0 n_c}{\sqrt{n_0^2 \sin^2 \theta + n_c^2 \cos^2 \theta}}$, 这是非寻常光, 由(2.12)式可得

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \pm \frac{1}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_0^4 \sin^2 \theta}} \left(-n_c^2 \cos \theta \frac{\hat{k} - \cos \theta \hat{z}}{\sin \theta} + n_0^2 \sin \theta \hat{z} \right) \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_0^4 \sin^2 \theta}} \frac{-n_c^2 \cos \theta \hat{k} + (n_0^2 \sin^2 \theta - n_c^2 \cos^2 \theta) \hat{z}}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

B.4

能流的方向由坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 给出。将电磁波的能量密度记为 u , 射线速度记为 v_r , 则 $v_r = \frac{S}{u}$ 。这里 $u = u_e + u_m$, 其中 $u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$, $u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 。分两种情况讨论:

(1) 对于 $n = n_0$, 有 $\vec{E} = (0, E, 0)$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 。

由 $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} = \omega \mu_0 \vec{H}$ 和 $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$ 可知, \vec{k} 、 \vec{E} 和 \vec{H} 互相垂直。所以 \vec{S} 与 \hat{k} 方向相同, 即

$$\hat{S} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \tan \alpha_r = 0 \quad (2.19)$$

由 A.3 问中的推导可知此时射线速度

$$v_r = \frac{S}{u} = v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_0}. \quad (2.20)$$

(2) 对于 $n = \frac{n_0 n_c}{\sqrt{n_0^2 \sin^2 \theta + n_c^2 \cos^2 \theta}}$, 取 $\vec{B} = (0, B, 0)$

(\vec{B} 沿 y 轴负方向也可以)。

\vec{D} 、 \vec{E} 和 \vec{k} 在 xz 平面内且 \vec{D} 垂直于 \hat{k} 。所以,

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ 和 \hat{k} 之间的夹角与 \vec{D} 和 \vec{E} 之间的夹角相同, 即

$$\alpha_r = \alpha. \quad (2.21)$$

当 $n_c < n_0$ 时此关系如图 2 所示。(当 $n_c > n_0$ 时, α 和 α_r 均为负值, \vec{E} 与 \vec{D} 方向的相对关系与图中相反, \hat{S} 与 \hat{k} 的顺序也交换)

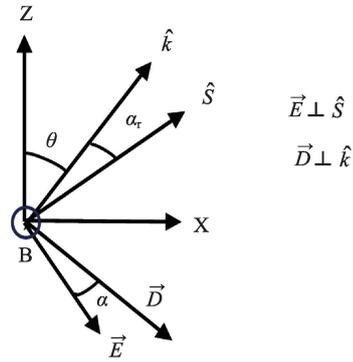


图 2

由 B.2 问可知

$$\tan \alpha_r = \tan \alpha = \frac{(n_0^2 - n_c^2) \tan \theta}{n_c^2 + n_0^2 \tan^2 \theta}, \quad (2.22)$$

由(1.8)式可知

$$u = \frac{1}{v_p} \hat{k} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{v_p} |\vec{E} \times \vec{H}| \cos \alpha = \frac{S \cos \alpha}{v_p}, \quad (2.23)$$

所以

$$v_r = \frac{S}{u} = \frac{v_p}{\cos \alpha}, \quad (2.24)$$

即相速度 v_p 和射线速度 v_r 之间的关系为

$$v_p = v_r \cos \alpha. \quad (2.25)$$

由 $\tan \alpha$ 可得 $\cos \alpha = \frac{n_c^2 \cos^2 \theta + n_0^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_0^4 \sin^2 \theta}}$, 所以

射线速度

$$v_r = \frac{v_p}{\cos \alpha} = \frac{c/n}{\cos \alpha} = \frac{c}{n_0 n_c} \sqrt{\frac{n_c^4 \cos^2 \theta + n_0^4 \sin^2 \theta}{n_c^2 \cos^2 \theta + n_0^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.26)$$

显然

$$\hat{S} = (\sin(\theta + \alpha), 0, \cos(\theta + \alpha)), \quad (2.27)$$

由 $\sin \alpha = \frac{(n_0^2 - n_c^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_0^4 \sin^2 \theta}}$,

$$\cos \alpha = \frac{n_c^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}, \text{ 可得}$$

$$\hat{S} = \frac{(n_o^2 \sin \theta, 0, n_c^2 \cos \theta)}{\sqrt{n_c^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}. \quad (2.28)$$

由

$$\begin{aligned} n_s^2 &= \left(\frac{c}{v_r} \right)^2 = n_o^2 n_c^2 \frac{n_c^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}{n_c^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{(n_o^2 \sin \theta)^2 n_c^2 + (n_c^2 \cos \theta)^2 n_o^2}{n_c^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

得射线折射率

$$n_s = \sqrt{(\hat{S} \cdot \hat{x})^2 n_c^2 + (\hat{S} \cdot \hat{z})^2 n_o^2}. \quad (2.30)$$

B.5

将A、B两点沿z轴方向的距离记为d,将光线与界面的交点取为原点O。B点和A点的坐标可表示为 $(h_2, 0, z)$ 和 $(h_1, 0, d-z)$ 。距离AO和OB可分别表示为

$$AO = d_1 = \sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}, \quad OB = d_2 = \sqrt{h_2^2 + z^2}. \quad (2.31)$$

光从A传播到B所用的时间可以用射线速度 v_r 计算得

$$t = \frac{d_1}{v_{r1}} + \frac{d_2}{v_{r2}} = \frac{d_1}{c/n_{s1}} + \frac{d_2}{c/n_{s2}} = \frac{n_{s1}d_1 + n_{s2}d_2}{c}, \quad (2.32)$$

其中 n_{si} 表示第*i*种介质的射线折射率。根据费马原理,我们需要使光程 $\Delta = n_{s1}d_1 + n_{s2}d_2$ 取最小值。

对于各向同性介质,射线折射率即介质折射率,即 $n_{s1} = n$ 。根据B.4问,有

$$n_s^2 = \left(\frac{\overline{OB}}{OB} \cdot \hat{x}_2 \right)^2 n_c^2 + \left(\frac{\overline{OB}}{OB} \cdot \hat{z}_2 \right)^2 n_o^2. \quad (2.33)$$

利用以下关系

$$\frac{\overline{OB}}{OB} \cdot \hat{x}_2 = \cos(\phi - \theta_2) = \frac{h_2}{d_2} \cos \phi + \frac{z}{d_2} \sin \phi, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OB}}{OB} \cdot \hat{z}_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi - \theta_2\right) = \sin(\theta_2 - \phi) \\ &= \frac{z}{d_2} \cos \phi - \frac{h_2}{d_2} \sin \phi, \end{aligned} \quad (2.35)$$

可得

$$\Delta = n \sqrt{h_1^2 + (d-z)^2} + \sqrt{\frac{(h_2 \cos \phi + z \sin \phi)^2 n_c^2 + (-h_2 \sin \phi + z \cos \phi)^2 n_o^2}{n_c^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}, \quad (2.36)$$

当 Δ 取极小值时, $\frac{d\Delta}{dz} = 0$, 得到

$$\begin{aligned} n \frac{z-d}{\sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}} + \\ \frac{h_2 \sin \phi \cos \phi (n_c^2 - n_o^2) + z(n_c^2 \sin^2 \phi + n_o^2 \cos^2 \phi)}{\sqrt{(h_2 \cos \phi + z \sin \phi)^2 n_c^2 + (-h_2 \sin \phi + z \cos \phi)^2 n_o^2}} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

注意到 $\frac{z-d}{\sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}} = \sin \theta_1$, 将第二项移至方程右边并将方程两边平方, 得到

$$n^2 \sin^2 \theta_1 = \frac{(P_3 - P_1 \tan \theta_2)^2}{P_1 \tan^2 \theta_2 - 2P_3 \tan \theta_2 + P_2}, \quad (2.38)$$

其中 $P_1 = n_o^2 \cos^2 \phi + n_c^2 \sin^2 \phi$ 、 $P_2 = n_o^2 \sin^2 \phi + n_c^2 \cos^2 \phi$ 、 $P_3 = (n_o^2 - n_c^2) \sin \phi \cos \phi$ 。

将上式展开, 得到

$$\begin{aligned} P_1(n^2 \sin^2 \theta_1 - P_1) \tan^2 \theta_2 - 2P_3(n^2 \sin^2 \theta_1 - P_1) \tan \theta_2 \\ + P_2 n^2 \sin^2 \theta_1 - P_3^2 = \bar{A} \tan^2 \theta_2 + \bar{B} \tan \theta_2 + \bar{C} = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

所以

$$\begin{aligned} \bar{A} &= P_1(n^2 \sin^2 \theta_1 - P_1), \quad \bar{B} = -2P_3(n^2 \sin^2 \theta_1 - P_1), \\ \bar{C} &= P_2 n^2 \sin^2 \theta_1 - P_3^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

当 $\phi = 0$ 时, 有 $P_1 = n_o^2$ 、 $P_2 = n_c^2$ 和 $P_3 = 0$ 。由(2.39)式可得

$$n_o^2(n^2 \sin^2 \theta_1 - n_o^2) \tan^2 \theta_2 + n_c^2 n^2 \sin^2 \theta_1 = 0, \quad (2.41)$$

解得

$$\tan \theta_2 = \frac{nn_c \sin^2 \theta_1}{n_o \sqrt{n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta_1}}. \quad (2.42)$$

当 $\phi = \pi/2$ 时, 有 $P_1 = n_c^2$ 、 $P_2 = n_o^2$ 和 $P_3 = 0$ 。由(2.39)式可得

$$n_c^2(n^2 \sin^2 \theta_1 - n_c^2) \tan^2 \theta_2 + n_o^2 n^2 \sin^2 \theta_1 = 0, \quad (2.43)$$

解得

$$\tan \theta_2 = \frac{nn_o \sin^2 \theta_1}{n_c \sqrt{n_c^2 - n^2 \sin^2 \theta_1}}. \quad (2.44)$$

【点评】B部分讨论平面电磁波在单轴介质中的传播规律, 得到了o光(寻常光)解和e光(非寻常光)解, 得到了e光沿不同方向传播时的折射率, 进一步利用费马原理讨论了光线在各向同性介质和单轴介质分界面上折射的规律。从结果可以看出此处波矢 \vec{k} 的方向和坡印廷矢量 \vec{S} 的方向不同, 相速度 v_p 和能流速度 v_r 也是不相同的。

C 部分. 光的纠缠

C.1

对于角频率为 ω 、波矢为 \vec{k} 的光波,相应的极化强度矢量 \vec{P} 和电场强度矢量 \vec{E} 都具有 $\vec{A} \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ 的形式,可改写为 $\frac{\vec{A}}{2}(e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)})$ 。将此形式代入极化响应关系的非线性项 $P_i^{NL} = \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$,由 t 和 \vec{r} 的系数相等可得所有可能的关系(即相位匹配条件)

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (3.1)$$

$$\text{或} \omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \quad (3.2)$$

已考虑到频率应为正值。

考虑到一个光子的能量和动量分别为 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\vec{k}$,上述关系的物理意义就很明确了。由(3.1)式可得

$$\hbar\omega = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \quad \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2, \quad (3.3)$$

此即 (ω, \vec{k}) 光子湮灭并分裂成 (ω_1, \vec{k}_1) 和 (ω_2, \vec{k}_2) 两个光子过程中的能量守恒定律和动量守恒定律;由(3.2)式可得

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega + \hbar\omega_2, \quad \hbar\vec{k}_1 = \hbar\vec{k} + \hbar\vec{k}_2, \quad (3.4)$$

此即 (ω_1, \vec{k}_1) 光子湮灭并分裂成 (ω, \vec{k}) 和 (ω_2, \vec{k}_2) 两个光子过程中的能量守恒定律和动量守恒定律。

C.2

对于光波共线分裂的情况,相位匹配条件(即(3.1)式)简化为

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad n_i(\omega) \frac{\omega}{c} = n_j(\omega_1) \frac{\omega_1}{c} + n_k(\omega_2) \frac{\omega_2}{c}, \quad (3.5)$$

其中下标 i, j, k 表示 o 或者 e 。在(3.5)式中 $\omega_1 = \omega - \omega_2$,可得

$$n_i(\omega) - n_j(\omega_1) = \frac{\omega_2}{\omega} [n_k(\omega_2) - n_j(\omega_1)]. \quad (3.6)$$

由于假设 $\omega_2 \leq \omega_1 < \omega$,折射率 n_o 和 n_e 都是 ω 的递增函数,如果 i, j, k 同时为 o 光(或同时为 e 光),则 $n_i(\omega) - n_j(\omega_1) > 0$ 且 $n_k(\omega_2) - n_j(\omega_1) \leq 0$, (3.6)式左右两

边矛盾,方程肯定不成立。对于其他情况,由于没有 n_o 和 n_e 间的大小关系,(3.6)式可能成立。

所以,8种分裂方式中 $o \rightarrow o + o$ 和 $e \rightarrow e + e$ 是不可能的。

C.3

在共线分裂中, $\omega = \Omega_p, \omega_1 = \Omega_c, \omega_2 = \Omega_o$,由相位匹配条件 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 可得 $\Omega_p = \Omega_c + \Omega_o$ 。在非共线分裂中, $\omega = \Omega_p$,将 ω_1, ω_2 分别在 $\omega_1 = \Omega_c, \omega_2 = \Omega_o$ 附近展开为 $\omega_1 = \Omega = \Omega_c + \nu, \omega_2 = \Omega = \Omega_o + \nu'$,由相位匹配条件 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 可得 $\nu' = -\nu$ 。

在共线分裂中,波矢 $k = K_p, k_1 = K_c, k_2 = K_o$,由相位匹配条件 $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ 可得 $K_p = K_c + K_o$ 。在非共线分裂中,波矢 $\vec{k} = k\hat{z} = K_p\hat{z}, \vec{k}_1 = k_{1z}\hat{z} + \vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_2 = k_{2z}\hat{z} + \vec{k}_{2\perp}$,由相位匹配条件 $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ 可得

$$K_p = k_{1z} + k_{2z}, \quad \vec{k}_{2\perp} = -\vec{k}_{1\perp} \equiv \vec{q}_{\perp}. \quad (3.7)$$

对于 o 光 (ω_2, \vec{k}_2) ,由 $k_2^2 = k_{2z}^2 + \vec{k}_{2\perp}^2$ 可得

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - \vec{k}_{2\perp}^2} = k_2 \left(1 - \frac{\vec{k}_{2\perp}^2}{k_2^2} \right)^{1/2} \approx k_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{k}_{2\perp}^2}{k_2^2} \right) = k_2 - \frac{q_{\perp}^2}{2k_2}. \quad (3.8)$$

由 $k_2 = n_o(\omega_2) \frac{\omega_2}{c}$,考虑到 $\omega_2 = \Omega_o - \nu$,将 $k_2(\omega_2)$ 在 $\omega_2 = \Omega_o$ 附近展开,可得

$$k_2 = n_o(\omega_2) \frac{\omega_2}{c} \approx n_o(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c} + \left. \frac{dk_2}{d\omega_2} \right|_{\Omega_o} (\omega_2 - \Omega_o) = K_o - \frac{\nu}{u_o}, \quad (3.9)$$

其中 $n_o(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c} = K_o, \frac{dk_2}{d\omega_2} = u_o$ 是 o 光的群速度。所以精确到二阶有

$$k_{2z} = K_o - \frac{\nu}{u_o} - \frac{q_{\perp}^2}{2K_o}. \quad (3.10)$$

类似地,对于 e 光 (ω_1, \vec{k}_1) ,由 $k_1^2 = k_{1z}^2 + \vec{k}_{1\perp}^2$ 可得

$$k_{1z} \approx k_1 - \frac{q_{\perp}^2}{2k_1}. \quad (3.11)$$

由 $k_1 = n_e(\omega_1, \theta_1) \frac{\omega_1}{c}$, k_1 的展开与 k_2 有所不同,因为 k_1 与角度有关。将 $k_1(\omega_1, \theta_1)$ 在 $\omega_1 = \Omega_c, \theta_1 = \theta$ 附近展开,可得

$$k_1 = n_c(\omega_1, \theta_1) \frac{\omega_1}{c} \approx n_c(\Omega_c, \theta) \frac{\Omega_c}{c} + \left. \frac{dk_1}{d\omega_1} \right|_{(\Omega_c, \theta)} \left(\omega_1 - \Omega_c \right) + \left. \frac{\Omega_c}{c} \frac{dn_c}{d\theta} \right|_{(\Omega_c, \theta)} (\theta_1 - \theta) \quad (3.12)$$

$$= K_c + \frac{v}{u_c} + \frac{\Omega_c}{c} \frac{dn_c(\Omega_c, \theta)}{d\theta} \delta\theta,$$

其中 $n_c(\Omega_c, \theta) \frac{\Omega_c}{c} = K_c$, $\frac{d\omega_1}{dk_1} = u_c$ 是 e 光的群速度, 考虑到 $k_1 = n_c(\omega_1, \theta_1) \frac{\omega_1}{c}$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_c} &= \left. \frac{dk_1}{d\omega_1} \right|_{(\Omega_c, \theta)} = \left. \frac{d}{d\omega_1} \left(n_c(\omega_1, \theta_1) \frac{\omega_1}{c} \right) \right|_{(\Omega_c, \theta)} \\ &= \frac{n_c(\Omega_c, \theta)}{c} + \frac{\Omega_c}{c} \frac{dn_c(\Omega_c, \theta)}{d\Omega_c} \end{aligned}$$

由(2.7)式 ($n = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}$) 得

$$\begin{aligned} \frac{dn_c(\Omega_c, \theta)}{d\theta} &= \frac{n_o n_e (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta}{(n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \\ &= n_c(\Omega_c, \theta) N_c(\Omega_c, \theta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

可得

$$N_c(\Omega_c, \theta) = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta} \quad (3.14)$$

注意到 $n_e < n_o$, 所以 $N_c(\Omega_c, \theta) < 0$ 。

为了得到 $\delta\theta = \theta_1 - \theta$, 将 \vec{k}_1 的方向和光轴 OA 的方向表示为

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= (\sin \psi_1 \cos \phi_1, \sin \psi_1 \sin \phi_1, \cos \psi_1), \\ \hat{e}_{OA} &= (\sin \theta, 0, \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $\sin \psi_1 = \frac{|\vec{k}_{1\perp}|}{k_1} = \frac{q_\perp}{k_1} \approx \frac{q_\perp}{K_c} \ll 1$,

$$\cos \psi_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_1} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{q_\perp^2}{K_c^2}.$$

一方面,

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 \cdot \hat{e}_{OA} &= \sin \psi_1 \cos \phi_1 \sin \theta + \cos \psi_1 \cos \theta \\ &= \frac{q_\perp}{K_c} \cos \phi_1 \sin \theta + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q_\perp^2}{K_c^2} \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.16)$$

另一方面, \vec{k}_1 与光轴 OA 的夹角为 θ_1 , 所以

$$\hat{k}_1 \cdot \hat{e}_{OA} = \cos \theta_1 \quad (3.17)$$

将 $\cos \theta_1$ 在 $\theta_1 = \theta$ 附近展开, 可得

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta - \sin \theta (\theta_1 - \theta) = \cos \theta - \sin \theta \delta\theta, \quad (3.18)$$

联立(3.16)(3.17)(3.18)式可得

$$\delta\theta = \theta_1 - \theta = \frac{1}{2} \frac{q_\perp^2}{K_c^2} \cot \theta - \frac{q_\perp}{K_c} \cos \phi_1 = \frac{1}{2} \frac{q_\perp^2}{K_c^2} \cot \theta - \frac{q_x}{K_c}, \quad (3.19)$$

将(3.13)(3.19)式代入(3.12)式, 再代入(3.11)式, 可得

$$\begin{aligned} k_{1z} \approx k_1 - \frac{q_\perp^2}{2k_1} &\approx K_c + \frac{v}{u_c} + N_c(\Omega_c, \theta) q_x \\ &\quad + (N_c(\Omega_c, \theta) \cot \theta - 1) \frac{q_\perp^2}{2K_c}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

将(3.10)式和(3.20)式代入(3.7)式 ($K_p = k_{1z} + k_{2z}$), 并考虑到 $K_p = K_c + K_o$ 、 $v = \Omega - \Omega_c$, 可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u_c} - \frac{1}{u_o} \right) (\Omega - \Omega_c) + N_c(\Omega_c, \theta) q_x \\ + \left(\frac{N_c(\Omega_c, \theta) \cot \theta - 1}{K_c} - \frac{1}{K_o} \right) \frac{q_\perp^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

注意到 $N_c(\Omega_c, \theta) < 0$, 所以 $\frac{N_c(\Omega_c, \theta) \cot \theta - 1}{K_c} - \frac{1}{K_o} < 0$ 。

令 $M = -\frac{1}{2} \left(\frac{N_c(\Omega_c, \theta) \cot \theta - 1}{K_c} - \frac{1}{K_o} \right) > 0$, 并考虑到 $q_\perp^2 = q_x^2 + q_y^2$, (3.21)式可化简为

$$M \left(q_x - \frac{N_c}{2M} \right)^2 + M q_y^2 = \left(\frac{1}{u_c} - \frac{1}{u_o} \right) (\Omega - \Omega_c) + \frac{N_c^2}{4M}, \quad (3.22)$$

与 $M(q_x + N)^2 + M q_y^2 = L$ 对比可得

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - N_c(\Omega_c, \theta) \cot \theta}{K_c} + \frac{1}{K_o} \right) > 0 \\ N = -\frac{N_c}{2M} > 0 \\ L = \left(\frac{1}{u_c} - \frac{1}{u_o} \right) (\Omega - \Omega_c) + \frac{N_c^2}{4M} \end{cases} \quad (3.23)$$

圆锥轴线与 z' 轴的夹角

$$\theta_0 \approx \frac{N}{k_{2z}} \approx \frac{N}{K_o}, \quad (3.24)$$

圆锥的半顶角

$$\alpha_0 \approx \frac{\sqrt{L/M}}{k_{2z}} \approx \frac{\sqrt{L/M}}{K_o}. \quad (3.25)$$

C.4

对于a光子,分别将与偏振片透射轴方向平行和垂直的电场分量记为 $|\alpha_x\rangle$ 和 $|\alpha_y\rangle$,这里 α_x 和 α_y 本质上是以合适的单位表示的电场振幅。沿着 \hat{x}' 方向和 \hat{y}' 方向的电场(量子态)可分别写为

$$\begin{cases} |\hat{x}'_a\rangle = \cos\alpha|\alpha_x\rangle - \sin\alpha|\alpha_y\rangle \\ |\hat{y}'_a\rangle = \sin\alpha|\alpha_x\rangle + \cos\alpha|\alpha_y\rangle \end{cases}, \quad (3.26)$$

类似地,对于b光子,有

$$\begin{cases} |\hat{x}'_b\rangle = \cos\beta|\beta_x\rangle - \sin\beta|\beta_y\rangle \\ |\hat{y}'_b\rangle = \sin\beta|\beta_x\rangle + \cos\beta|\beta_y\rangle \end{cases}, \quad (3.27)$$

所以可得

$$\begin{cases} \langle\hat{x}'_a|\hat{y}'_b\rangle = (\cos\alpha|\alpha_x\rangle - \sin\alpha|\alpha_y\rangle)(\sin\beta|\beta_x\rangle + \cos\beta|\beta_y\rangle) \\ \langle\hat{y}'_a|\hat{x}'_b\rangle = (\sin\alpha|\alpha_x\rangle + \cos\alpha|\alpha_y\rangle)(\cos\beta|\beta_x\rangle - \sin\beta|\beta_y\rangle) \end{cases}, \quad (3.28)$$

光子对的纠缠态可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\hat{x}'_a|\hat{y}'_b\rangle + \langle\hat{y}'_a|\hat{x}'_b\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin(\alpha+\beta) \\ &(|\alpha_x\rangle|\beta_x\rangle - |\alpha_y\rangle|\beta_y\rangle) + \cos(\alpha+\beta) \\ &(|\alpha_x\rangle|\beta_y\rangle - |\alpha_y\rangle|\beta_x\rangle)], \end{aligned} \quad (3.29)$$

由上式可得

$$\begin{aligned} P(\alpha,\beta) &= P(\alpha_{\perp},\beta_{\perp}) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta), \\ P(\alpha,\beta_{\perp}) &= P(\alpha_{\perp},\beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha+\beta). \end{aligned} \quad (3.30)$$

C.5

注意到

$$E(\alpha,\beta) = \frac{P(\alpha,\beta) + P(\alpha_{\perp},\beta_{\perp}) - P(\alpha,\beta_{\perp}) - P(\alpha_{\perp},\beta)}{P(\alpha,\beta) + P(\alpha_{\perp},\beta_{\perp}) + P(\alpha,\beta_{\perp}) + P(\alpha_{\perp},\beta)}, \quad (3.31)$$

将(3.30)式代入得

$$E(\alpha,\beta) = \sin^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) = -\cos 2(\alpha+\beta), \quad (3.32)$$

所以

$$\begin{aligned} S &= |E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta')| + |E(\alpha',\beta) + E(\alpha',\beta')| \\ &= |-\cos 2(\alpha+\beta) + \cos 2(\alpha+\beta')| + \\ &|-\cos 2(\alpha'+\beta) - \cos 2(\alpha'+\beta')|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

当 $\alpha = \pi/4, \alpha' = 0, \beta = -\pi/8, \beta' = \pi/8$ 时,

$$S = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 2\sqrt{2} > 2, \quad (3.34)$$

与经典理论中 $S \leq 2$ 不一致。

【点评】C部分讨论了在非线性介质中光波分裂的频率和波矢条件,讨论了在单轴介质中光波分裂后的传播方向问题,又进一步讨论了光子分裂后产生的纠缠光子对的探测问题。从结果可以看出,光的经典理论不再适用,原因是此处光子对的纠缠涉及到光的量子效应。

科苑快讯

人工光合作用可将二氧化碳转化为食物

德国慕尼黑工业大学(Technical University of Munich)的研究人员通过人工光合作用,利用二氧化碳制造必需氨基酸左旋丙氨酸(L-alanine)。这个过程首先将二氧化碳转化为甲醇,然后是左旋丙氨酸。这一新方法比传统农业所需空间更少,显示了生物经济与氢能经济相结合的巨大潜力,有助于未来世界的可持续发展。

给不断增长的世界人口提供足够的粮食,与环境保护的目标,往往相互冲突。研究人员通过人工光合作用合成营养蛋白,不仅可以满足动物饲料工业对营

养蛋白的大量需求,而且也可用于肉类替代品。

从大气中去除的二氧化碳,首先通过绿色电力和氢气转化为甲醇,再利用合成酶将这种中间体转化为左旋丙氨酸,该方法的产量非常高。左旋丙氨酸是蛋白质最重要的成分之一,对人类和动物的营养都至关重要。

研究人员说,他们还希望利用可再生能源,以二氧化碳为原料生产其他氨基酸,并进一步提高效率。

(高凌云编译自2023年5月1日SciTechDaily网站)