



2021年亚洲物理奥赛理论第三题——磁悬浮

张康 宋峰

(南开大学物理科学学院 300071)

本题中涉及的相关数学知识:

(1) 空间函数 $f(\vec{r})$ 的方向导数, 由 $f(\vec{r})$ 给出, 具有 $\vec{\nabla}f \equiv \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r})$, 其中 $\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r})$ 表示 $f(\vec{r})$ 是关于 x 的偏导数, 同时保持 y 和 z 不变。

(2) 积分:

$$\int_0^\infty dt \frac{(a+pt)}{\left[(a+pt)^2 + (b+qt)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{bp-aq} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)$$

引言

本题拟研究导电薄膜附近小磁偶极子(magnetic dipole)的运动。在本题中, 偶极子(dipole)和单极子(monopole)分别指的是磁偶极子和磁单极子。

由具有均匀磁化强度 \vec{M} (每单位体积的磁偶极矩)和均匀质量密度 ρ_0 的球形永磁体组成的偶极子在其半径 R 较小时可被视为点状(point-like)物体。这种偶极子模型非常适合描述偶极子在其球体之外的任何地方产生的磁场。当场源与偶极子的距离远大于 R 时, 该模型也可以很好地近似描述外加磁场作用在偶极子上的力。

点状偶极子可以被认为是一对分别携带负磁电荷 $-q_m$ 和正磁电荷 q_m 的单极子。该极子对的间距非常小, 它具有有限的磁偶极矩 $\vec{m} = q_m \vec{\delta}_m$ 。这里 $\vec{\delta}_m$ 是从南单极子($-q_m$)到北单极子($+q_m$)的位移矢量。

点状偶极子的位置选择为北单极子的位置。

假设来自单极子 q_m 的磁场 \vec{B}_{mp} 具有库仑形式, 由下式给出:

$$\vec{B}_{mp} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (1)$$

其中 \vec{r} 是从 q_m 到观测点(或场点)的位移矢量, \hat{r} 是单位矢量 $\hat{r} = \vec{r}/r$, μ_0 是真空磁导率。外加磁场 \vec{B}' 施加在 q_m 上的力由 $\vec{F} = q_m \vec{B}'$ 给出。因此, 通过方程(1)中描述的单极场的概念, 来自点状偶极子的磁场 \vec{B} 可从标量势 Φ 推导出来, 由公式 $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$ 给出。标量势 Φ 也称为磁势。

导电薄膜在 z 方向上具有均匀厚度 d (图1)。它在 x 和 y 方向上水平延伸至无穷远, 其上表面与点状单极子或偶极子的距离为 h 。我们只考虑 $h \gg d$ 的情况, 可以认为薄膜中感应电流密度与 z 无关, 并假设位移电流效应忽略不计。

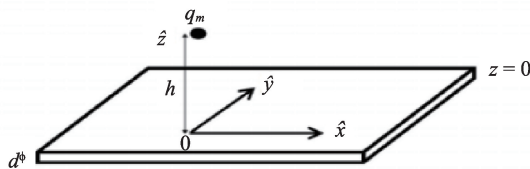


图1 单极子 q_m 出现在距离厚度为 d 的导电薄膜的距离 h 处 (坐标的原点位于上表面)

问题分为三个部分。在A部分中, 系统由单极子和薄膜组成, 而在B和C部分中, 系统由移动偶极子和薄膜组成。选择 $z=0$ 的平面与薄膜的上表面重合。矢量 $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho}$ 表示平面内的位移矢量。

A 部分:磁单极子的突然出现:薄膜中的初始响应和随后的时间演化 (3.0 分)

首先关注导电薄膜的初始响应,当时间 $t=0$ 时,北单极子 q_m 突然出现在 $\vec{r}_{mp} = h\hat{z}$ ($h>0$) 的位置,如图 1 所示。单极子在之后的所有时间内 ($t>0$) 都保持静止。

我们关注的是区域 $z\geq 0$ 和 $z\leq -d$ 中的初始总磁场 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$, 以及薄膜中的感应电流密度。总磁场 $\vec{B} = \vec{B}_{mp} + \vec{B}'$, 其中磁场 \vec{B}_{mp} 和 \vec{B}' 分别是由于薄膜中的单极子和感应电流产生的。初始磁场 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ 是指在 t_0 时的磁场, $h/c \leq t_0 \ll \tau_c$, 这里 τ_c 是表征薄膜随后响应的的时间常数, c 是真空中光速。在本题中,取极限 $h/c \rightarrow 0$, 因此取 $t_0 = 0$ 。

通过引入镜像单极子(image monopole)有助于计算初始总磁场 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ ($t_0 = 0$)。对于区域 $z\geq 0$ 中的 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$, 镜像单极子具有磁荷 q_m 并且位于 $z = -h$ 。另一方面,对于区域 $z\leq -d$ 中的 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$, 镜像单极子具有磁荷 $-q_m$ 并且位于 $z = h$ 。

初始响应

A.1 当 $t_0=0$ 时,求 $z\geq 0$ 区域的初始总磁场 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ 。(0.4分)

A.2 当 $t_0=0$ 时,求 $z\geq -d$ 区域的初始总磁场 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ 。(0.2分)

A.3 在 $z=0$ 和 $z=-d$ 处,求通过表面的初始磁通量 Φ_B 。(0.4分)

A.4 当 $t_0=0$ 时,求导电薄膜中的初始感应电流密度 $\vec{J}(\vec{\rho})$ 。(0.6分)

对于 $t>0$,通过与薄膜中感应电流产生的磁场 $\vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$ 叠加,总磁场 \vec{B} 可表示为 $\vec{B}(\vec{\rho}, z; t) = \vec{B}_{mp}(\vec{\rho}, z) + \vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$ 。需要在下面求解 $B'_z(\rho, z; t)$ 在薄膜表面附近 $z=0$ 处的方程。 B'_z 的时间演化行为将揭示一个运动镜像单极子的图像,用于描述 $t>0$

时,在 $z\approx 0$ 附近的 \vec{B}' 。薄膜内的 B'_z 方程如下所示:

$$\frac{\partial^2 B'_z(\rho, z; t)}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B'_z(\rho, z; t)}{\partial t} \quad (2)$$

该方程是通过将麦克斯韦方程和导电薄膜的欧姆定律 ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$, 其中 σ 是电导率) 强加于薄膜内部,同时忽略位移电流效应而获得的。由于 $h \gg d$, 忽略方程(2)左侧 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial B'_z}{\partial \rho} \right)$ 的项。

随后的响应

A.5 通过方程式(2),求 $B'_z(\rho, z; t)$ 在 $z\approx 0$ 附近的方程。该方程包含 $B'_z(\rho, z; t)$ 相对于 z 的一阶偏导数,以及相对于 t 的偏导数。(0.6分)

A.6 当 $t>0$ 时,在 $z\approx 0$ 附近,求解 $B'_z(\rho, z; t)$ 的一般形式。(0.6分)

A.7 证明在 A.6 中的解答揭示了运动镜像-单极子具有向下移动速度的磁场 $B'_z(\rho, z\approx 0; t)$ 。根据题给已知参量,求出镜像-单极子的速度 v_0 。(0.6分)

B 部分:作用在以恒定速度 \vec{v} 和恒定高度 h 移动的点状偶极子上的磁力 (4.0 分)

在 A.7 中, $z\approx 0$ 附近的 B'_z 的运动镜像-单极子概念,假设对于 $z\geq 0$ 区域的 \vec{B}' 也适用。只要时间演化在导电薄膜响应中足够慢,上述假定就会符合得很好。

单极子 q_m (图 2) 以恒定速度 $v\hat{x}$, $v \ll c$, 在恒定高度 $z = h$ 移动,运动到当前时刻 ($t=0$)。它的当前坐标 (x, y) 为 $(0, 0)$ 。我们的重点是由该移动单极子沿其轨迹产生的所有镜像单极子所产生的磁势 Φ_z 。

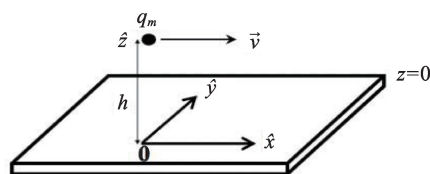


图2 单极子 q_m 从距导电薄膜恒定高度 h 处以恒定速度 \vec{v} 移动(图中所示为 $t=0$ 时刻)

通过将 q_m 的轨迹拆分为离散的时间段(一个非常小的时间段 τ), 并将 q_m 的运动替换为每个时间段的开始时刻的“跳跃”。一个跳跃由同时移除和产生单极子来表征。产生的单极子的位置与该时间段开始时刻其轨迹上的一个点重合。因此, 被移除的单极子的位置与其在前一时间段的开始时刻的轨迹位置重合。这是通过同时突然出现两个磁单极子来实现的: q_m 和 $-q_m$ 的位置, 分别对应于本时间段和前一个时间段的开始时刻。这两个位置之间的距离 $\Delta x = v\tau$ 。这种时间段方法有助于确定在所有时间段中生成的所有镜像磁单极子及其位置。

移动的单极子

B.1 写下 q_m 和 $-q_m$ 类型的所有镜像单极子的当前($t=0$)位置。时段步长的起始时刻在 $t = -n\tau$, 其中 $n \geq 0$ 。(0.8分)

B.2 从 B.1 中的所有镜像单极子中, 给出 $t=0$ 时的磁势 $\Phi_+(x, z)$ 的求和形式, 并计算得到 $\Phi_+(x, z)$ 的表达式。(0.7分)

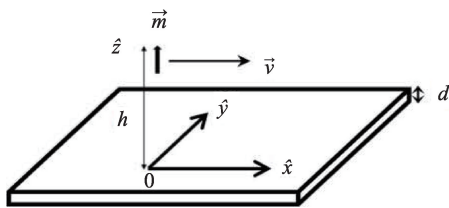


图3 具有向上磁偶极矩 \vec{m} 的偶极子从距导电薄膜恒定高度 h 处以恒定的速度 \vec{v} 移动(图示是它在 $t=0$ 时的坐标)

现在考虑一个如图3所示的点状移动磁偶极子。偶极子具有偶极矩 $\vec{m} = m\hat{z}$, 以恒定速度 $v\hat{x}$ 和恒定高度 ($z = h$) 向上运动到当前时刻 ($t=0$), 其当前坐标位于 $(0, 0)$ 。如引言部分所述, 点状偶极子可以由两个微位移的单极子表示。磁偶极子的位置选择为北单极子的位置, 并假设 \vec{m} 保持固定。

移动偶极子

B.3 求出 $t=0$ 时, 导电薄膜作用于点状磁偶极子的力 \vec{F} 。(1.5分)

v_0 和 v 之间的关系

对于下面这部分的数值评估, 考虑由铜制成的导电薄膜, 其中 $\sigma = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $d = 0.50 \text{ cm}$, $h = 5.0 \text{ cm}$ 。

B.4 根据 A.7 计算镜像-偶极子(image dipole)的速度 v_0 (0.3分)

众所周知, 穿透深度 δ (趋肤深度), 即电磁波可以穿透到导电板的距离, 取决于波的角频率 ω 。其满足:
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \quad (3)$$

对于下面的考虑, 取 $\omega = v_L/h$, 其中 v_L 等于 v_0 和 v 两者之间的较大速度。

B.5 在 v 较小和较大两种状态下, 求 $v_0(v)$ 对 v 依赖关系。(0.4分)

B.6 求 B.5 中两种状态相遇的临界速度 $v = v_c$ 。(0.3分)

C 部分: 导电薄膜为超导时磁偶极子的运动(3.0分)

以上考虑可以应用于 I 型超导体的情况, 通过考虑电导率 $\sigma \rightarrow \infty$, 磁场始终完全与超导体排斥(迈斯纳效应)。

考虑一个点状磁偶极子, 其水平磁偶极矩为 $\vec{m} = m\hat{x}$, 质量为 M_0 , 位于 $(x, y, z) = (0, 0, h)$ 。关注磁偶极子在重力场作用下的垂直运动, 重力加速度 $\vec{g} = -g\hat{z}$ 。假设忽略给定偶极子方向与其质心运动之间的弱耦合。因此, 在下面的考虑中, 我们可以固定磁偶极矩。此外, 假设一个超高真空环境, 因此不需要考虑残余空气对运动的阻尼。

C.1 求出偶极子与超导薄膜的平衡距离 h_0 。(1.2分)

C.2 求出平衡点附近振荡的偶极子角频率 Ω 。(0.8分)

球形永磁体的物理参数如下: 半径 $R = 1.0 \mu\text{m}$, 质量密度 $\rho_0 = 7400 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ TA}^{-1} \text{m}$, 以及磁化强度 $|\vec{M}| = 7.5 \times 10^2 \text{ T/\mu}_0$ 。

C.3 计算 h_0 的值。(0.7分)

C.4 计算 Ω 的值。(0.3分)

背景知识:

磁偶极子:两个数量相等但符号相反的磁量系统。

磁单极子:指单独具有磁北极(正磁荷)或单独具有磁南极(负磁荷)的磁体。

趋肤深度:由于电磁波在良导体中的衰减速度很快,导致电磁波几乎只能存在于导体表面,这一现象称为趋肤效应。趋肤深度等于透射波场量的振幅衰减到表面值的 $1/e=0.368$ 所经过的距离。

超导:超导指的是一些材料在特定条件(例如低温环境)下表现出来非常特殊的超级导电性,超导状态下传输电流时不受任何阻力,没有热量产生,也没有能量的浪费。

永磁体:永磁体是指一类具有一旦被磁化,其磁化特性难以失去的磁体。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至 aosai@ihep.ac.cn 邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。



科苑快讯

生物塑料将有助扭转气候危机

使用生物基原料的循环生物经济,可大幅减少全球塑料行业对环境的影响。如果将高温气体排放价格和循环战略,与生物基有原材料、无排放电力和高质量回收相结合,可能使塑料行业成为碳汇。荷兰乌得勒支大学(Utrecht University)、荷兰环境评估机构(Netherlands Environmental Assessment Agency, PBL)、荷兰可持续能源协会(Netherlands Association for Sustainable Energy, NVDE)和荷兰应用科学组织(Netherlands Organisation for Applied Scientific Research, TNO)的研究人员,最近在《自然》(Nature)期刊上发表了这一结论。碳汇是指,通过植树造林、植被恢复等措施,吸收大气中的二氧化碳,从而减少温室气体在大气中浓度的过程、活动或机制。

按照现有政策,到2100年,全球塑料产量将增加2倍,该行业的温室气体排放量几乎占据所有温室气体排放量的5%。然而,塑料在生物碳储存方面的作用并未得到充分利用。到2050年,目前用于发电的生物质中有13%可以用作塑料原料。使用长寿命的塑料,



如建筑材料,是地球上最大的塑料库存。如果从现在到2100年,生产的所有塑料都是生物基的,寿命为几十年,甚至几百年,那么理论上,我们可以捕获相当于目前每年与能源相关的温室气体排放量的9倍。

传统的机械回收手段将塑料颗粒进行再加工,不但降低了再生塑料的质量,而且可能残留污染物,因此不适用于食品包装等用途。而利用化学回收,可以去除污染物,并为再生塑料提供高质量原料。

(高凌云编译自2023年4月30日 SciTechDaily 网站)