



# 2021年亚赛理论第一题 “水锤效应”的解答

陈仓佚<sup>1</sup> 吴波<sup>1</sup> 宋峰<sup>2</sup>

(1. 成都天府第七中学 610218; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

2021年亚洲物理奥林匹克竞赛理论第一题以水锤效应(或水击现象)为背景求解不同情境下压力管道中液体压强和流速的变化,本文在参考答案的基础上对该题进行详细分析与解答。

## 第一部分:压强变化和压强波传播

### 问题 1.1

如图1所示,压强为 $P_0$ 的流体,在阀门出口突然受阻时,压强突变为 $P_1 = P_0 + \Delta P_s$ ,并产生向上游(向左)传播的压强波,其传播速度为 $c$ ,振幅为 $\Delta P_s$ 。靠近阀门的流体单元速度从 $v_0$ 变为 $v_1$  ( $v_1 \leq 0$ ),即速度的变化为 $\Delta v = v_1 - v_0$ 。取向右为 $x$ 正方向。

在以速度 $c$ 向左移动(沿 $x$ 负方向)的参考系中,压强波中流体的速度为 $c + v_1$ 。而压强波前方迎面流入的流体速度为 $c + v_0$ 。压强波中流体的密度为 $\rho_1$ 。根据质量守恒,由流体连续性方程可得

$$\rho_0(c + v_0) = \rho_1(c + v_1) \quad (1)$$

令密度变化 $\Delta\rho \equiv \rho_1 - \rho_0$ ,则有

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{v_0 - v_1}{c + v_0} = \frac{-\Delta v}{c + v_0} \quad (2)$$

在阀门关闭后极短的时间间隔 $\tau$ 内,对于在时

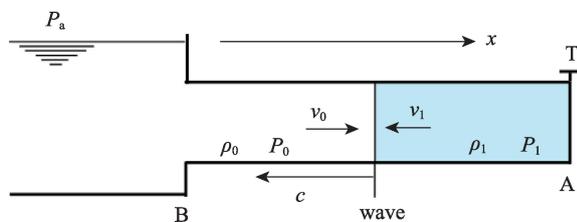


图1 速度为 $c$ 的压强波(阴影部分)

间 $\tau$ 内流过的单位面积内流体质量微元 $\Delta m = \rho_0(c + v_0)\tau$ ,施加给它的冲量必须等于其动量变化。因此运用动量定理有

$$\rho_0(c + v_0)\tau[(c + v_1) - (c + v_0)] = -\tau\Delta P = (P_0 - P_1)\tau \quad (3)$$

可写为

$$\Delta P_s = -\rho_0 c \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) (v_1 - v_0) = -\rho_0 c \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \Delta v \quad (4)$$

题目中给出压强变化 $\Delta P_s$ 与速度的改变量 $\Delta v$ 的关系可表示为 $\Delta P_s = \alpha \rho_0 c \Delta v$ ,因此可以得到系数 $\alpha = -\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$ 。

如果 $\frac{v_0}{c} \ll 1$ ,则有

$$\Delta P_s = -\rho_0 c \Delta v \quad (5)$$

式(4)和(5)中的负号是因为压强波的传播方向与 $x$ 轴正方向相反。此外还需注意,对于压缩波( $\Delta P_s > 0$ ),传递给流体单元的速度与波的传播方向一致,而对于膨胀波( $\Delta P_s < 0$ )则与波传播方向相反。

联立式(2)和(4)可得

$$\Delta P_s = \rho_0 c^2 \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \quad (6)$$

根据题目中体积模量 $B$ 的定义 $\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0}$ ,其中 $V_0$ 为流体微元在压强下 $P_0$ 的体积,假设 $B$ 为常数,可得

$$\Delta P_s = B \frac{V_0 - V_1}{V_0} = B \frac{1/\rho_0 - 1/\rho_1}{1/\rho_0} = B \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \quad (7)$$

联立式(6)和(7)可得

$$\rho_0 c^2 \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)^2 = B \quad (8)$$

因此压强波速度表示为

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} - v_0 \quad (9)$$

题目给出压强波的传播速度为  $c = \beta + \sqrt{\gamma B / \rho_0}$ , 对比式(9)得到系数为  $\gamma = 1$ ,  $\beta = -v_0$ 。

如果在体积模量的定义中使用密度变化率  $\Delta\rho/\rho_0$  代替体积变化率  $-\Delta V/V_0$ , 那么系数  $\gamma = 1 + \Delta P_s/B$ 。

### 问题 1.2

如果  $\frac{v_0}{c} \ll 1$ , 则压强波传播速度表示为

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (10)$$

由式(5)和(10)可得

$$\Delta P_s = \rho_0 c v_0 = v_0 \sqrt{\rho_0 B} \quad (11)$$

代入题目给出的数据  $v_0 = 4.0 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 0$ ,  $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $B = 2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$  得

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = 1.5 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (12)$$

$$\Delta P_s = v_0 \sqrt{\rho_0 B} = 5.9 \text{ MPa} \quad (13)$$

从结果可看出  $\Delta P_s$  的大小接近标准大气压的 59 倍。以上数据中  $\frac{v_0}{c} \sim 10^{-3}$ , 因此利用式(5)和(10)的近似结果进行计算是合理的。

## 第一部分评述

第一部分为整个题目的基础物理模型, 要求定量分析均匀圆柱形管道中的水流在阀门突然全部关闭时流体压强变化和压强波的传播速度。流速改变量已知时, 对流体微元进行分析, 运用动量定理可导出压强变化量与波速、流速变化量的关系。根据连续性方程可求得流体密度变化量与波速、流速变化量的关系。最后根据压强变化与体积变化的关系可以得出压强波波速与流体体积模量、密度和稳定流速之间的关系, 从而求出题目中三个系数的表达式。代入水流的相关数据计算得阀门突然关闭时产生的水击压强可以达到大气压强的几十倍。

## 第二部分: 流量控制阀模型

### 问题 2.1

假设流体不可压缩, 忽略重力影响, 由理想流体的伯努利方程可得

$$\frac{1}{2} \rho_0 v_{in}^2 + P_{in} = \frac{1}{2} \rho_0 v_c^2 + P_a = \text{常数} \quad (14)$$

其中  $P_{in}$ 、 $P_a$  表示管道内流体压强和大气压强,  $v_{in}$ 、 $v_c$  表示管道内流体流速和阀门出口处流体流速。由流体体积不可压缩有  $\pi R^2 v_{in} = \pi r_c^2 v_c$ , 根据收缩系数的定义代入  $r_c = r \sqrt{C_c}$  可得

$$\pi R^2 v_{in} = \pi r_c^2 v_c$$

因此得出

$$v_c = \frac{1}{C_c} \left( \frac{R}{r} \right)^2 v_{in} \quad (15)$$

由式(14)和(15)可以得出流体压强变化为

$$\Delta P_{in} = P_{in} - P_a = \frac{1}{2} \rho_0 v_{in}^2 \left[ \frac{1}{C_c^2} \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 1 \right] = \frac{k}{2} \rho_0 v_{in}^2 \quad (16)$$

将上式同除以  $\rho_0 c^2$  写成无量纲的形式:

$$\frac{\Delta P_{in}}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_{in}}{c} \right)^2 \left[ \frac{1}{C_c^2} \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 1 \right] = \frac{k}{2} \left( \frac{v_{in}}{c} \right)^2 \quad (17)$$

其中系数  $k$  表示为

$$k = \left[ \frac{1}{C_c^2} \left( \frac{R}{r} \right)^4 - 1 \right] \quad (18)$$

式(17)表明压强改变量  $\Delta P_{in}$  是关于  $v_{in}$  的二次函数。

## 第二部分评述

本部分是对水击压强传递基础模型的进一步

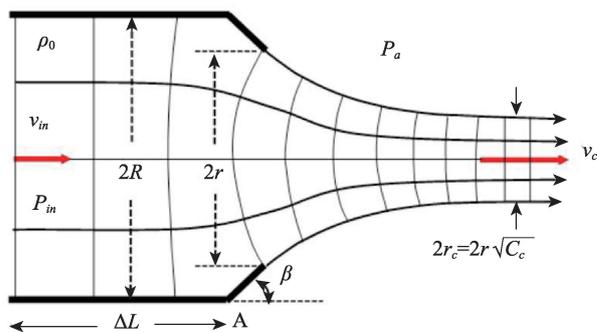


图2 阀门尺寸和喷射口的收缩示意图

研究,根据理想流体伯努利方程和连续性方程计算阀门喷射口外径收缩至最小值时流体压强的变化量<sup>[1]</sup>。该变化量与流体截面收缩系数、管道内流速有关;收缩系数则由阀门几何尺寸(倾角和内外径比值)决定。本部分结论将直接用于研究压力管道内的水击压强传播时在阀门附近的变化规律。

### 第三部分:流量控制阀快速关闭引起的水锤效应

#### 问题 3.1

储液器底端靠近管道的液体压强  $P_h = P_a + \rho_0 gh$ , 根据流体伯努利方程可得:

$$\frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 + P_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v_c^2 + P_a = P_h = P_a + \rho_0 gh \quad (19)$$

上式中,  $h$  为储液器液面相对于管道的高度。阀门外流体速度  $v_c$  可根据自由落体运动表示为  $v_c = \sqrt{2gh}$ 。再根据不可压缩流体体积不变的特点可得出

$$\pi R^2 v_0 = \pi (C_c R)^2 v_c \quad (20)$$

完全打开阀门时  $C_c (r=R) = 1.0$ , 代入得流体流速为  $v_0 = v_c = \sqrt{2gh}$

因此有流体压强

$$P_0 = P_a = P_h - \rho_0 gh \quad (21)$$

#### 问题 3.2

当阀门打开时,管道中的流体以速度  $v_0$  和压强  $P_0$  稳定流动。阀门突然关闭时,阀门附近的流体单元停止运动( $v_1 = 0$ ),压强的变化量为  $\Delta P_s$ ,速度的变化量则为  $\Delta v = v_1 - v_0 = -v_0$ 。由式(5)可得流体的压强变化量

$$\Delta P_s = -\rho_0 c \Delta v = \rho_0 c v_0 \quad (22)$$

在  $t = \frac{\tau}{2} = \frac{L}{c}$  时刻( $L$  为管道长度),压强波到达储液器端。管道内的流体速度全部变为  $v(\tau/2) = v_1 = v_0 + \Delta v = 0$ , 此时流体压强为

$$P(\tau/2) = P_1 = P_0 + \Delta P_s = P_0 + \rho_0 c v_0 \quad (23)$$

储液器与管道连接位置的恒定液体静压强为

$P_h = P_0 + \rho_0 gh$ 。当向左传播的压缩波( $\Delta P_s > 0$ )到达储液器端时,流体压强下降,压缩波将反射为膨胀波向右传播。与静压强  $P_h$  相比,向左的压缩波振幅为  $\Delta P_{lr} = P_1 - P_h$ , 因此向右反射的膨胀波( $\Delta P_s < 0$ )振幅为  $\Delta P'_1 = -\Delta P_{lr}$ ,

于是有

$$\begin{aligned} \Delta P'_1 = -\Delta P_{lr} &= P_h - P_1 = (P_0 + \rho_0 gh) - \\ &(P_0 + \rho_0 c v_0) = -\rho_0 c \left( v_0 - \frac{gh}{c} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

此处压强波振幅可正可负,其中负振幅表示膨胀波。根据式(5)可知管道储液器端流体的速度变化为(压强波的传播方向为  $x$  轴正方向):

$$\Delta v_{lr} = +\Delta P'_1 / (\rho_0 c) = -\left( v_0 - \frac{gh}{c} \right) \quad (25)$$

因此管道储液器端的流体速度变为

$$v_{lr} = v_1 + \Delta v_{lr} = 0 - \left( v_0 - \frac{gh}{c} \right) \quad (26)$$

在管道内反射膨胀波未传播到的位置,流体速度和压强未发生改变,速度仍然为  $v_1 = 0$ , 流体压强仍为  $P_1 = P_0 + \Delta P_s$ , 但反射膨胀波到达处的流体微元速度变为

$$v_{lr} = -\left( v_0 - gh/c \right) \quad (27)$$

压强变为

$$P_1 + \Delta P'_1 = (P_0 + \rho_0 c v_0) - \rho_0 c \left( v_0 - \frac{gh}{c} \right) = P_0 + \rho_0 gh \quad (28)$$

因此,在  $t = \tau = 2L/c$  时刻,反射波的波前到达阀门,根据式(28),整个管道中的流体压强为

$$P(\tau) = P_0 + \rho_0 gh = P_h \quad (29)$$

同时由式(26)得,管道中所有流体的速度为

$$v(\tau) = v_{lr} = -\left( v_0 - \frac{gh}{c} \right) \quad (30)$$

也就是说管道中的流体正在向储液器方向倒流。

### 第三部分评述

本部分内容与压力管道中水锤效应导致的液体压强和流速变化直接相关,分别讨论了阀门完全打开和阀门立即完全关闭两种情况下管道流体的

压强和速度。实际问题中,水锤效应发生最常见的原因就是流体管道阀门突然关闭。利用第一部分的结论可求解出压强波到达储液器端时管道内的流体压强和速度。压强波在向上游储液器端传播时压强增大,又与管道中原定的流体流动方向相反,称为增压逆波。储液器与管道连接位置的恒定液体静压强较低,因此压强波在储液器端发生反射后从压缩波变为膨胀波。根据反射膨胀波的特点可解出管道在储液器端的流体压强和速度变化,再根据入射波与反射波的叠加(包括压强和流体速度)可得反射波到达阀门时管道中的流体压强和速度。本部分题目内容难度不高,需要提前掌握流体受扰动形成的压强压缩波和膨胀波的基本特点。

#### 第四部分:流量控制阀缓慢关闭引起的水锤效应

##### 问题 4.1

本题目中,取储液器底端流体静压强  $P_h$  与  $P_0$  近似相等 ( $P_h = P_0 + \rho_0 g h \approx P_0$ ), 相当于把所有结果中  $h$  的值取为 0。

##### (1) 关闭步骤 $n=1$

在阀门处,启动关闭步骤  $n=1$  后,流体压强立刻从  $P_0$  突变为  $P_1$ ,使流速从  $v_0$  变为  $v_1$ 。压强和速度的变化关系由式(5)  $\Delta P_s = -\rho_0 c \Delta v$  给出:

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_1 - P_0) = -(v_1 - v_0) \quad (31)$$

在压强波刚好被储液器反射之前,整个管道中的流体压强为  $P_1$ ,速度为  $v_1$ 。从被储液器反射后(即成为压强波的自由端)到关闭步骤  $n=2$  前,将式(28)中  $h$  取为 0,则整个管道中的流体压强为

$$P'_1 = P_1 + (P_0 - P_1) = P_0 \quad (32)$$

速度为

$$v'_1 = v_1 + \frac{-(P_1 - P_0)}{\rho_0 c} = v_1 + (v_1 - v_0) \quad (33)$$

##### (2) 关闭步骤 $n=2$

启动关闭步骤  $n=2$  后,阀门压强立刻从  $P_0$  突

变为  $P_2$ ,流速从  $v'_1$  变为  $v_2$ 。压强和速度的变化关系由式(5)和(33)可得:

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_2 - P_0) = -(v_2 - v'_1) = -v_2 + v_1 + (v_1 - v_0) \quad (34)$$

代入式(31)可将上式改写为

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_2 - P_0) = -(v_2 - v_1) - \frac{1}{\rho_0 c}(P_1 - P_0) \quad (35)$$

在压强波刚好被储液器反射之前,整个管道中的流体压强为  $P_2$ ,速度为  $v_2$ 。从被储液器反射后到关闭步骤  $n=3$  前,整个管道中的流体压强为

$$P'_2 = P_2 + (P_0 - P_2) = P_0 \quad (36)$$

速度为

$$v'_2 = v_2 + (v_2 - v'_1) \quad (37)$$

##### (3) 关闭步骤 $n=3$

启动关闭步骤  $n=3$  后,阀门压强立刻从  $P_0$  突变为  $P_3$ ,使流速从  $v'_2$  变为  $v_3$ 。压强和速度的变化关系由式(5)和(37)可得:

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_3 - P_0) = -(v_3 - v'_2) = -v_3 + v_2 + (v_2 - v'_1) \quad (38)$$

利用式(34),可以将上式改写为

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_3 - P_0) = -(v_3 - v_2) - \frac{1}{\rho_0 c}(P_2 - P_0) \quad (39)$$

在压强波刚好被储液器反射之前,整个管道中的流体压强为  $P_3$ ,速度为  $v_3$ 。从被储液器反射后到关闭步骤  $n=4$  前,整个管道中的流体压强为

$$P'_3 = P_3 + (P_0 - P_3) = P_0 \quad (40)$$

速度为

$$v'_3 = v_3 + (v_3 - v'_2) \quad (41)$$

##### (4) 关闭步骤 $n=4$

关闭步骤  $n=4$  启动时,阀门被完全关闭,此时阀门变成一个固定端,因此流体速度从  $v'_3$  变为  $v_4=0$ 。压强和速度的变化关系由式(5)和(41)可得:

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_4 - P_0) = -(v_4 - v'_3) = -v_4 + v_3 + (v_3 - v'_2) \quad (42)$$

代入式(38)可将上式改写为

$$\frac{1}{\rho_0 c}(P_4 - P_0) = -(v_4 - v_3) = -(v_4 - v_3) - \frac{1}{\rho_0 c}(P_3 - P_0) \quad (43)$$

根据以上四个关闭步骤的结果可得所有阀门

关闭步骤中压强增量和速度变化量的关系式都有着相同的形式:

$$\frac{\Delta P_n}{\rho_0 c} = -(v_n - v_{n-1}) - \frac{\Delta P_{n-1}}{\rho_0 c} \quad (n=1,2,3,4) \quad (44)$$

上式中 $\Delta P_0$ 和 $v_4$ 的大小分别为 $\Delta P_0=0$ 和 $v_4=0$ 。

根据第二部分中式(16)和(18),可以得到 $\Delta P_n$ 和 $v_n$ 的另一个关系式:

$$\Delta P_n = \frac{1}{2} k_n \rho_0 v_n^2 \quad (n=1,2,3) \quad (45)$$

用 $C_n$ 表示 $r=r_n$ 时的收缩系数 $C_c$ ,则式(18)中的系数 $k_n$ 表示为

$$k_n = \left[ \frac{1}{C_n^2} \left( \frac{R}{r_n} \right)^4 - 1 \right] \quad (n=1,2,3) \quad (46)$$

将式(45)代入式(44),可以得到关于 $v_n$ 的二次方程:

$$\frac{1}{2} k_n \left( \frac{v_n}{c} \right)^2 + \frac{v_n}{c} + \left( \frac{\Delta P_{n-1}}{\rho_0 c^2} - \frac{v_{n-1}}{c} \right) = 0 \quad (n=1,2,3) \quad (47)$$

利用一元二次方程求根公式求解方程(47)得:

$$\frac{v_n}{c} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2k_n \left( \frac{v_{n-1}}{c} - \frac{\Delta P_{n-1}}{\rho_0 c^2} \right)}}{k_n} \quad (n=1,2,3) \quad (48)$$

由式(45)可知 $\Delta P_{n-1}$ 是关于 $v_{n-1}$ 的二次函数。当 $v_{n-1}$ 已知时,可求出 $\Delta P_{n-1}$ 。 $\Delta P_{n-1}$ 和 $v_{n-1}$ 都已知的情况下,则可通过式(48)计算 $v_n$ ,最后 $\Delta P_n$ 通过式(45)得出。因此,式(44)可以从 $n=1$ 迭代到 $n=3$ 进行求

解。对于关闭步骤 $n=4$ 的情况,将 $v_n=0$ 代入式(44)可直接得出 $\Delta P_n$ 。

### 问题4.2

本题将根据问题4.1的结果,选取流速为 $v_0=4.0$  m/s的水作为管道中的流体,通过绘制 $\Delta P-\rho_0 cv$ 图像求解问题。为便于用图像法求解式(44)和(45),我们将这两式改写为:

$$\Delta P_n = -(\rho_0 cv_n - \rho_0 cv_{n-1}) - \Delta P_{n-1} \quad (n=1,2,3,4) \quad (49)$$

$$\Delta P_n = \frac{k_n}{2\rho_0 c^2} (\rho_0 cv_n)^2 \quad (n=1,2,3) \quad (50)$$

在 $\Delta P-\rho_0 cv$ 曲线中,式(49)和(50)分别表示为一条过点 $(\rho_0 cv_{n-1}, -\Delta P_{n-1})$ 且斜率为-1的直线和一条过原点的抛物线。根据图像我们可以通过确定两条曲线的交点来获得阀门每一个关闭步骤过程中对应的压强变化和流速。所得结果如下图3和表1所示。

## 第四部分评述

本部分描述的物理情境与实际生产生活中压力管道内由水击引发的压强波传播过程比较接近。将压力管道阀门的关闭分为4个过程,每个过程的持续时间与压强波在管道中往返一次所需的时间相等。问题4.1的解答过程看似繁琐,实际上

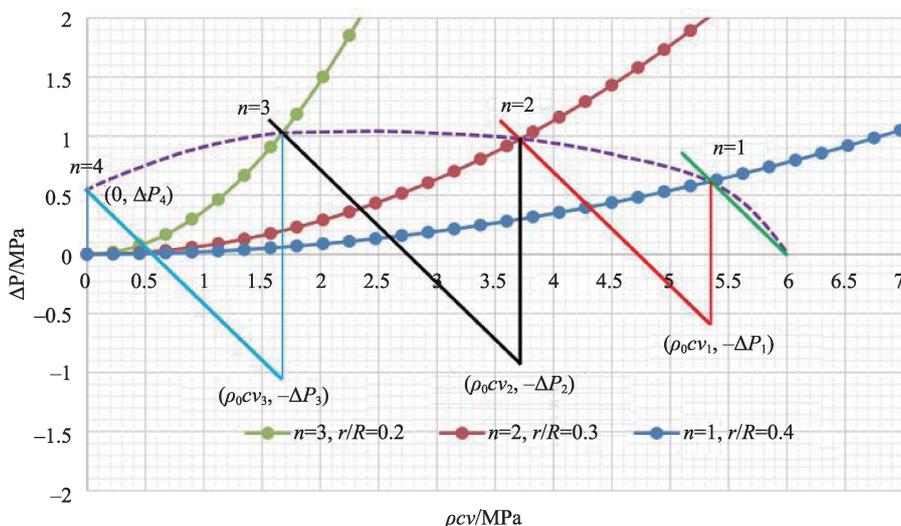


图3 阀门处 $\Delta P-\rho cv$ 曲线

表1 阀门缓慢关闭过程中阀门处流体压强增量和流速( $\rho_0 c = 1.50 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$   $v_0 = 4.0 \text{ m/s}$ )

$n$	$r_n/R$	$C_n$	$k_n$	$v_n/(\text{m/s})$	$\rho_0 c v_n/\text{MPa}$	$\Delta P_n/\text{MPa}$	$\Delta P_n/(\rho_0 c v_0)$
0	1.00	1.00	0.0	4.0	6.0	0.0	0.0
1	0.40	0.631	97.1	3.6	5.4	0.62	10%
2	0.30	0.622	318.0	2.5	3.8	1.0	17%
3	0.20	0.616	1646.0	1.1	1.7	1.1	18%
4	0.00			0.0	0.0	0.64	11%

在将管道靠近储液器一端的静压强近似为大气压强后,利用第三部分中压强波到达储液器端和反射回阀门端时流体压强和速度的公式,即可导出阀门不同关闭过程中压强增量和速度变化量的关系式;再利用第二部分中的管道内流体压强增量与流速的关系式,可以得出连续两次关闭过程中管道内流体流速、压强增量的关系;代入初始流体压强和流速即可迭代求解出任意阀门关闭过程中的流速和压强增量。从结果可得,缓慢关闭阀门时水击压强增量比瞬间关闭阀门造成的水击压强增量小得多。问题4.2则可看作借助函数图像进行求解方程的一个范例。

水击压强波的传播速度很大,因此水击循环一次所需的时间很短,所以管道受到迅速变化的一胀一缩的交变力的作用。但由于实际流体具有黏性,摩擦及管道变形均需要消耗能量,所以水击波不可能无休止地传播下去,而是逐渐衰减直至消失。实际上与水击相关的理论研究较多,过程中涉及流体动力学理论模型建立以及计算方法,需要具备较好的数理能力<sup>[2]</sup>。

## 水锤效应的危害与防治

实际中压力管道内的水击远比本题目中考虑的情况复杂。阀门的突然关闭或开启,水泵的突然启动或停止,水轮机或液压油缸突然变化负载等都有可能引起管道中液体的运动状态突然改变,从而导致压强的突变,并在管长范围内传播,形成水锤

效应。当阀门迅速关闭时,管内流速急剧下降,压强迅速上升,称为正水击,可能使管道爆裂。而当阀门迅速开启时,管内流速急剧上升,压强迅速下降,称为负水击,可使管道产生真空和汽蚀,导致管道变形<sup>[3,4]</sup>。

由于对管路系统十分有害,因此工业应用中必须设法削弱它的作用,具体可采用以下几方面的措施:

(1) 延长阀门的关闭或开启时间,或缩短管长,尽量将直接水击变为间接水击。

(2) 限制管路流速,一般液压系统中最大流速限制在5~7 m/s左右。

(3) 阀门前设置空气室或溢流阀,水击发生时,空气室里的空气受到压缩,或在水击发生时,将部分液体从管中放出,从而使水击压强降低。

(4) 增加管道弹性,例如液压系统中,铜管铝管就比钢管有更好的防水击性能;或采用弹性较大的软管,如橡胶或尼龙管吸收冲击能量,则可更明显地减轻水击。

## 参考文献

[1] 周光炯,严宗毅,许世维. 流体力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.  
 [2] 任东芮. 水击理论及水击波速的研究[D]. 郑州, 郑州大学硕士学位论文, 2016.  
 [3] 雷鸣远. 液体输送管道水击现象的产生及防控[J]. 化工设计, 2021, 31(1): 8-46.  
 [4] 王文婷,路宏. 浅析压力管道中水击现象的危害及预防[J]. 内蒙古石油化工, 2013, 8: 92-94.