光线追踪和纠缠光的产生——2021年亚洲物理奥林匹克竞赛理论第二题

房　颐[1]　宋　峰[2]

(1. 南京师范大学附属中学 210003；2. 南开大学物理科学学院 300071)

有用的公式：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

用 $\vec{E}$ 表示电场强度，$\vec{H}$ 表示磁场强度，$\vec{D}$ 表示电位移，$\vec{B}$ 表示磁感应强度。$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$，其中 $\vec{P}$ 是极化强度，ε_0是真空介电常量。本题中只考虑非磁性电介质，即 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，其中μ_0是真空磁导率。与电磁场相关的能量密度和能流密度分别由 $u_{em}=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})$ 和坡印廷矢量 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 给出。在均匀电介质中，单色平面波可以用其角频率ω、波矢 $\vec{k}$、$\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 来描述。根据麦克斯韦方程组，我们有 $\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$ 和 $\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\vec{D}$。对于这样的波，$\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 随位置 $\vec{r}$ 和时间t的变化可以用相位为$(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$的正弦函数来表示。

A. 在各向同性电介质中的光传播

如果介质是各向同性的，我们有

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}\text{和}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

其中，χ和$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi)$分别是介质的极化率和介电常量。对于各向同性介质中角频率为ω的光波，相位将沿 $\vec{k}$ 方向以速度(称为相速度)$v_p=c/n$传播，这里c是真空中的光速，n是介质的折射率。还可以使用射线来代表一束光波。光线的传播可以用电磁场能流的方向和速度v_r来描述。

考虑均匀各向同性电介质中角频率为ω、波矢为 $\vec{k}$ 的一个平面光波。

A.1 用ε和μ_0来表示它的相速度v_p。(0.4分)

A.2 对于该光波，电介质的折射率n是多少？(0.2分)

A.3 它的电磁场能流的方向 $\hat{S}=\vec{S}/S$ 和速度v_r如何？(0.4分)

B. 在单轴电介质中的光传播

现在，假设电介质是单轴的，即它沿介质中某个固定的特殊方向(称为光轴)是电各向异性的，我们现在将其称为z方向。在这种情况下，电位移 $\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$ 的关系为 $D_x=\varepsilon E_x$、$D_y=\varepsilon E_y$ 和 $D_z=\varepsilon' E_z$，其中x、y和z轴相互正交。因此，光波的相速度是各向异性的，还额外取决于 $\vec{k}$ 和 $\vec{D}$ 的方向。记 $n_o=c\sqrt{\mu_0\varepsilon}$ 和 $n_e=c\sqrt{\mu_0\varepsilon'}$，回答下列问题：B.1、B.2和B.3。

B.1 假设单色平面光波的波矢 $\vec{k}$ 在xz平面中，则 $\vec{k}=k(\sin\theta,0,\cos\theta)$。在每个角度$\theta$处，光波的 $\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 允许沿哪些方向？找出所有可能的折射率，并用θ、n_o和n_e表示。求出角度θ，该角度下折射率的值只有一个。(1.5分)

B.2 光波的偏振，即其电场 $\vec{E}$ 的方向，可以垂直于xz平面(称为寻常光或o光)或平行于xz平面(称为非寻常光或e光)。对于在B.1中找出的每个光波，将其偏振方向用单位矢量来表示，并判断它是寻常光还是非寻常光。再计算$\tan\alpha$，其中α是 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 之间的夹角(从 $\vec{E}$ 到 $\vec{D}$ 顺时针旋转时α为正)。(0.8分)

B.3 将B.1和B.2中的结果扩展到一般情况，$\vec{k}$和z轴正方向之间的夹角仍然是θ，但$\vec{k}$不在xz平面中。求出所有可能的折射率值和相应的偏振。(0.6分)

在单轴介质中，光波的$\vec{k}$方向可能与光线的方向不同。波的相速度仍然由c/n给出，其中n是沿$\vec{k}$方向的折射率，而射线速度由能流的方向和速度大小共同定义。

B.4 结合问题B.1–3，考虑一个光波，其$\vec{k}=k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$。令$\hat{k}=\vec{k}/k$与射线的方向$\hat{S}$之间的夹角为$\alpha_r$(从$\hat{S}$到$\hat{k}$沿顺时针方向时$\alpha_r$为正)。求出$\tan\alpha_r$、射线速度$v_r$和$\hat{S}$的所有可能值。利用这些结果，用$\hat{S}$、$\hat{x}$、$\hat{z}$、$n_o$和$n_e$来表示射线折射率$n_s=c/v_r$。(0.8分)

考虑光线通过各向同性介质(记为介质1)和各向异性介质(记为介质2)之间的界面，从A传播到B，如图1所示。该界面与yz平面重合，而入射平面为xz平面。令入射角为θ_1。介质1的折射率为n，而介质2在z_2、y_2、x_2轴上的折射率分别为n_e、n_o和n_o。这里y_2轴与y轴重合。费马原理指出，光线从A到B的传播时间是最短的。对于偏振平行于xz平面并以角度θ_1入射的光，由费马原理可得出以下方程式：

$$\overline{A}(\tan\theta_2)^2+\overline{B}\tan\theta_2+\overline{C}=0。\qquad(1)$$

B.5 求出$\overline{A}$、$\overline{B}$和$\overline{C}$，用P_1、P_2、P_3和$n\sin\theta_1$表示，其中$P_1=n_o^2\cos^2\phi+n_e^2\sin^2\phi$、$P_2=n_o^2\sin^2\phi+n_e^2\cos^2\phi$、$P_3=\left(n_o^2-n_e^2\right)\sin^2\phi\cos^2\phi$。由方程(1)，求出$\phi=0$和$\phi=\pi/2$两个特殊方向所对应的$\tan\theta_2$。(1.1分)

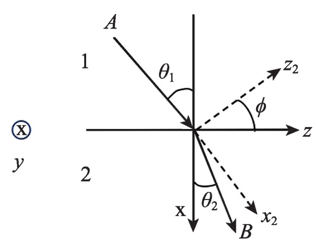

图1 光通过各向同性介质1和各向异性介质2之间的界面从A传播到B

C. 光的纠缠

在非线性介质中，电场强度$\overline{E}$和极化强度$\overline{P}$之间的关系为

$$P_i=\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)E_i+\sum_j\sum_k\chi_{ijk}^{(2)}E_jE_k,$$

这里i、j、k可以是x、y、z三个分量中的任何一个，$\chi_{ijk}^{(2)}$是代表介质的二阶非线性极化的常数。$\chi_{ijk}^{(2)}$的存在意味着当光波通过非线性介质时，它可以分成两个光波。

假设由于$\chi_{ijk}^{(2)}$不全为零，介质中的电场由三个角频率分别为ω、ω_1和ω_2的平面波的叠加组成，并分别以波矢$\vec{k}$、$\vec{k}_1$和$\vec{k}_2$传播。假设$\omega\geqslant\omega_2$且$\omega_1\geqslant\omega_2$。

C.1 找出这些角频率和波矢之间的所有可能关系(称为相位匹配条件)。将光视为由光子组成，这些条件对涉及的三个光子意味着什么样的守恒定律？对于角频率为ω，波矢为$\vec{k}$的光子被分成角频率为ω_1和ω_2，分别以波矢$\vec{k}_1$和$\vec{k}_2$传播的两个光子的情况，写出表示这些守恒律的方程。(0.8分)

C.2 考虑单轴介质中的光波。将寻常光线记为o，将非寻常光线记为e。有8种可能的光波分裂方式：o→o + o，o→e + o，o→o + e，o→e + e，e→o + o，e→e + o，e→o + e，e→e + e。假设折射率n_o和n_e都是ω的递增函数。使用与问题C.1中相同的波矢符号，并考虑$\vec{k}$、$\vec{k}_1$和$\vec{k}_2$共线的情况，请指出这8种分裂方式中哪些是不可能的。(0.8分)

考虑沿z'方向入射单轴介质的e光，其波矢为$\vec{k}$且$\omega=\Omega_p$，其折射率$n_e<n_o$。假设在共线分裂e→e+o中，通过$k_1=K_e$、$\omega_1=\Omega_e$、$k_2=K_o$和$\omega_2=\Omega_o$来实现相位匹配条件。在这里，下标1和2分别表示e光和o光。$\vec{k}_1$、$\vec{k}_2$和$\vec{k}$都指向z'方向。如图2(a)所示，介质的光轴(OA)位于$x'z'$平面，并且与z'轴的夹角$\theta<\pi/2$。因此，n_e是ω和θ的函数，即$n_e=n_e(\omega, \theta)$。对于波矢为$\vec{k}$且$\omega=\Omega_p$的同一条入射e光，假定其非共线分裂为e+o光会导致后两条光线分离，但仍保留在两个圆锥上，其中$\omega_1=\omega_2=\Omega$，$k_1=k_2$，如图2(b)所示。请注意，在共线分裂中，Ω_e已经接近Ω_o，并且此处Ω仅略小于Ω_e。在垂直于$\vec{k}$的平面中，$\vec{k}_1$和$\vec{k}_2$的圆锥上的两个圆相交于a点和b点，直线ab平行于y'轴。如图2(a)所示，$\vec{k}_\alpha$(α=1, 2)与光轴成角度θ_α，并具有角坐标

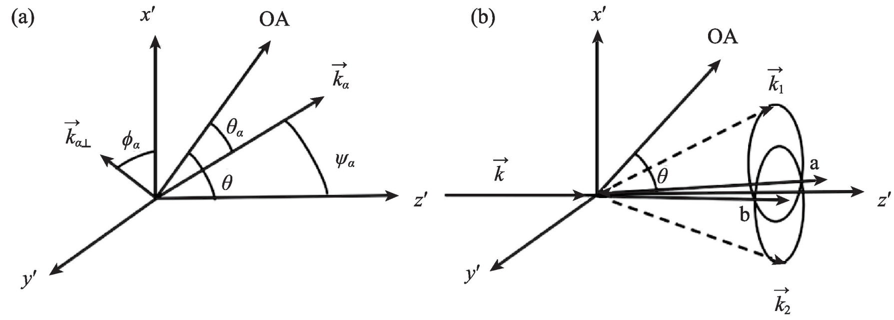

图2:(a) $\vec{k}_\alpha$ 矢量在 $x'y'z'$ 坐标系中具有角坐标 $(\psi_\alpha,\phi_\alpha)$,$\vec{k}_{\alpha\perp}$ 是其在 $x'y'$ 平面上的投影。注意到 $\vec{k}_\alpha$ 与光轴OA的夹角为 θ_α。
(b)e光非共线分裂为e光+o光,从而形成两个圆锥。直线ab平行于 y' 轴。

$(\psi_\alpha,\phi_\alpha)$,$\vec{k}_{\alpha\perp}$ 是其在 $x'y'$ 平面上的投影。每个 $\vec{k}_\alpha$ 矢量偏离 z' 轴的程度都很小,使得 $\left|\dfrac{\Omega-\Omega_e}{\Omega_e}\right|\ll 1$,$\dfrac{|\vec{k}_{\alpha\perp}|}{k_\alpha}\ll 1$ 和 $|\theta_\alpha-\theta|\ll 1$。进行近似,使 $\vec{k}_\alpha$ 的 z' 分量精确到 $k_{\alpha\perp}^2$ 项,角度 θ_α 精确到 $(\theta_\alpha-\theta)^2$,可以得到 $\vec{k}_{2\perp}=(q_{x'},q_{y'})$ 必须满足 $M(q_{x'}+N)^2+Mq_{y'}^2=L$。

C.3 令 $M>0$,计算 M、N 和 L,用 Ω、Ω_e、Ω_o、K_e、K_o 和 $N_e(\omega,\theta)=\dfrac{1}{n_e(\omega,\theta)}\dfrac{\mathrm{d}n_e(\omega,\theta)}{\mathrm{d}\theta}$,以及o光和e光的群速度 $u_o=\dfrac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}k_2}$ 和 $u_e=\dfrac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}k_1}$ 来表示。估算圆锥轴线与 z' 轴的夹角,以及圆锥的顶角,用 L、M、N 和 K_o 来表示。(1.3分)

问题C.3表明,一个光子可能会分裂为两个光子,当通过a点和b点时,它们的偏振方向互相垂直。这两个光子称为纠缠光子对,因为如果通过a的一个光子(称为a光子)的偏振沿 $\hat{x}'$ 方向,则通过b的另一个光子(称为b光子)的偏振将沿 $\hat{y}'\perp\hat{x}'$ 方向,并且如果a光子偏振沿 $\hat{y}'$ 方向,则b光子偏振将沿 $\hat{x}'$ 方向。纠缠光子对可以通过实验得到。它是以上两个备用状态的叠加,可以表示为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle+|\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle\right)$。这里 $|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle$ 表示a光子的偏振沿 $\hat{x}'$ 方向且b光子的偏振沿 $\hat{y}'$,对于 $|\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle$ 同理。系数 $1/\sqrt{2}$ 可以看作是a光子和b光子的电场振幅(以合适的单位表示)的乘积。如图3所示,两个线偏振片1和2的透射轴相对于 $\hat{x}'$ 分别成 α 和 β 角度。我们可以使用它们对通过a和b的两个光子进行同时测量。将同时找到通过偏振片1和2的两个光子的概率记为 $P(\alpha,\beta)$。或者,$P(\alpha,\beta)$ 也可视为与通过两个偏振器的光(在适当的叠加之后)的强度的乘积成正比。将 $\alpha+\pi/2$ 和 $\beta+\pi/2$ 分别表示为 $\alpha_\perp$ 和 $\beta_\perp$。

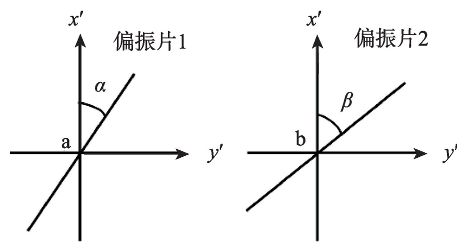

图3 两个线偏振片1和2,用于对通过a和b的光子进行符合测量

C.4 考虑透过线偏振片的总电场,求出概率 $P(\alpha,\beta)$、$P(\alpha,\beta_\perp)$、$P(\alpha_\perp,\beta)$ 和 $P(\alpha_\perp,\beta_\perp)$。(0.8分)

C.5 当偏振片1以 α 角探测到一个a光子时,令 $\sigma_a=1$,当偏振片1以 $\alpha_\perp$ 角探测到一个a光子时,令 $\sigma_a=-1$。类似地,当偏振片2以 β 或 $\beta_\perp$ 角探测到一个b光子时,令 $\sigma_b=1$ 或 -1。若 $E(\alpha,\beta)$ 表示 $\sigma_a\sigma_b$ 的平均值,物理量 $S=|E(\alpha,\beta)-E(\alpha,\beta')|+|E(\alpha',\beta)+(\alpha',\beta')|$ 有重要的意义。在光的经典理论中,$S\leqslant 2$。这是Bell不等式的变形(Clauser-Horne-Shimony-Holt不等式)。求出 S 的表达式,求出 $\alpha=\pi/4$、$\alpha'=0$、$\beta=-\pi/8$、$\beta'=\pi/8$ 情形下的 S 值。指出 S 与经典理论是否一致。(0.5分)

背景知识介绍

1. 晶体的各向异性:晶体与非晶体的重要区别是晶体在不同的空间方向上表现不同的物理特性,

称为各向异性。构成晶体的分子或原子按一定方向排成周期性结构，整个晶体结构可看成是结点(原子或分子)沿空间不同方向按一定距离平移而成，因不同方向周期不同，所以晶体物理性质与方向有关，即晶体的介电常数以及折射率是与方向有关的。

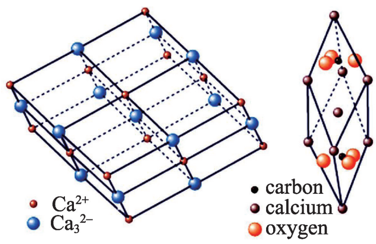

图4

2. 晶体双折射：当光入射到各向同性介质(如水、玻璃等)的分界面上时遵从折射定律，折射光只有一束，即只成一个像。当光入射到各向异性介质(如冰、方解石、石英等晶体)的分界面上时，一般会产生两束折射光，即可以观察到双像(如图)，其中一束光满足通常的折射定律，称为寻常光(o光)，另一束光不满足折射定律，称为非寻常光(e光)。双折射是由晶体中各向异性的原子间结合力导致的，即在某些方向上原子之间存在较强的吸引力。

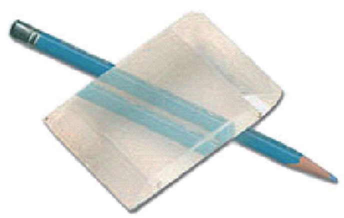

图5

3. 光轴：在晶体中存在某个特殊方向，光在晶体中沿这个方向传播时不发生双折射，即o光和e光不分开，传播速度相等，该特殊方向称为晶体的光轴。常见的单轴晶体有天然方解石、石英、红宝石，以及人工拉制的ADP(磷酸二氢氨)、铌酸锂($LiNiO_3$)等；双轴晶体有云母(Mica)、蓝宝石(Sapphire)、黄玉(Topaz)等。

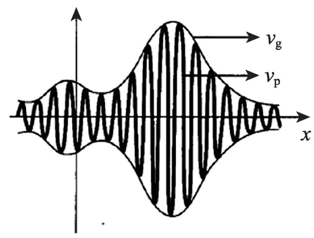

图6

4. 相速度和群速度：平面简谐波传播时等相位面的移动速度称为相速度v_p，若将沿x方向传播的平面简谐波记为$u(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$，则等相位面的方程即为$kx-\omega t$=常数，取微分得$k\mathrm{d}x-\omega\mathrm{d}t=0$，所以相速度$v_p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}$。为了使波能够携带信息，在实际应用中总会对波进行调制，形成波包。波包中心移动的速度称为群速度v_g，$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$。对于无色散的介质，即波的相速度$v_p=\frac{\omega}{k}$与波的频率或波长无关，其群速度$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}(v_p k)}{\mathrm{d}k}=v_p$，与相速度$v_p$相等。

5. 纠缠态：量子力学允许两个或更多的粒子以共享状态存在，无论它们相距多远。当两个粒子处于纠缠的量子态时，测量其中一个粒子的属性，就可以立即确定对另一个粒子进行等效测量的结果，而无需检验。自量子力学理论提出以来，这一直是争论最多的内容之一。爱因斯坦称之为鬼魅般的超距作用，薛定谔则说它是量子力学最重要的特征。2022年诺贝尔物理学奖授予阿兰·阿斯佩(Alain Aspect)、约翰·弗朗西斯·克劳泽(John Francis Clauser)、安东·塞林格(Anton Zeilinger)，以表彰他们通过光子纠缠实验，确定贝尔不等式在量子世界中不成立，并开创了量子信息这一学科。

* * * * * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动，并在答案公布前将您的解答发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者，编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。