激光技术
—2020年第51届国际物理奥赛理论第3题解答

刘　军[1]　宋　峰[2]

(1. 河北省石家庄二中实验学校 050057；2. 开大学物理科学学院 300071)

解题时，可使用下列物理常数的值：

真空中的光速 c = $3.00 \cdot 10^{8}$ m/s，

约化普朗克常数$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J·s，

库仑定律中的常数和介电常数 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^{9} \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$.

基本电荷电量 $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C。

【A1解答】

偶极矩为：$\vec{p}(t) = \overrightarrow{p_m}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\overrightarrow{p_m}\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

代入题目中所给出的功率公式(1)，

$$P = \frac{2k}{3c^3}\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right\rangle$$

求平均值：

$$P = \frac{2k}{3c^3}\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{dt^2}\right)^2\right\rangle = \frac{2k}{3c^3}\oint_0^{2n\pi}\left[\omega^2\left|\overrightarrow{p_m}\right|\cos(\omega t + \varphi)\right]^2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2k}{3c^3}\left(\frac{\left|\overrightarrow{p_m}\right|\omega^2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k{p_m}^2\omega^4}{3c^3} \tag{3}$$

根据光子的能量公式：

$$E = \hbar\omega \tag{4}$$

而又由

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \tag{5}$$

且根据电偶极矩定义

$$p_m = ea_0 \tag{6}$$

代入公式即可有

$$\tau = \frac{E}{P} = \frac{3\hbar\lambda_0^3}{8\pi^3 ke^2 a_0^2} \tag{7}$$

代入数据，得到：$\tau = 1.5 \times 10^{-8} s$

分析：作为整道题的第一小问，该问并没有过多的题外知识以及分析能力的考察，更多的是考察考生对于文本所给材料的阅读能力和基本计算能力。只需要考生可以认真阅读题干所给信息，根据所给公式进行计算（本体涉及到求微分、求平均值，以及通过计算器计算数值）便可以解出此题。计算的基本功也很重要。值得注意的是，这种考法正在越来越多地进入复赛与决赛当中，如36届复赛的第七题，37届决赛的第一题等。

【A2解答】

自发辐射时，N个原子辐射出的光子是不相干的，可以直接代数相加，即有

$$W_s = \frac{N\hbar\omega}{\tau} \tag{8}$$

【A3解答】

由题，持续时间可以通过功与功率的关系得出，

$$\Delta T_s = \frac{E}{W_s} \tag{9}$$

$$E = N\hbar\omega \tag{10}$$

将(10)代入(9)即可有，

$$\Delta T_s = \tau \tag{11}$$

分析：

这两问的公式推导很简单，看似“送分”，实则是为下面两问对于超辐射理解的引导。如果在这两问，考生没有对于功和时间的足够理解，而是通过量纲法等技巧得出的结论，那么之后的解题将会寸步难行。此外，对于自发辐射的非相干性的概念的理解，也是本题的基础。

【A4解答】

由于激光为同相位的“超辐射”，因而光振幅矢量会产生相干叠加。全体电磁辐射的光振幅矢量为单个光振幅的N倍，即：

$$A = Na \tag{12}$$

其中A为合光振幅，a为单个光子的光振幅。

又根据光强与光振幅矢量的平方关系，单个光子的能量为

$$e = a^2 = \hbar\omega \tag{13}$$

将(12)(13)代入总能量公式 $E = A^2$，再除以时间，就得到功率

$$W_i = \frac{N^2\hbar\omega}{\tau} \tag{14}$$

分析：初读此问，可能会有些许迷惑，不清楚题目到底指向了哪个考点，但只需要细心思考出题模式，我们不难发现在和A2问对比时，最明显的差别便是“受激状态下的原子偶极子方向及其振荡相位相同”这一条题给条件。因此本题的考察应指向光学的矢量叠加。那么我们便可轻易得知，能量应当是先由光振幅矢量叠加后再进行平方，这也是 N^2 的由来。自此我们也可以看出，此题是一个隐藏的波动光学问题。

【A5解答】

根据功与功率的关系我们可知

$$\tau = \frac{E}{W_i} = \frac{\tau}{N} \tag{15}$$

分析：本题着重考察了对相干的理解：如果没有额外的能量提供，相干的同时一定伴随着相消。因为能量是守恒的。在此基础上，我们不应当考虑偶极子两次发射时的间隔，而应当考虑功与功率的关系。因为在此时间之外可能存在着其他我们不知道的效应，将这段时间的光强干涉相消为0。但能量守恒是一个不变的定律，因此我们从能量守恒出发，便可得到答案。

【B1解答】

根据题意，可以得知，两光波所处位置的介质的折射率为

$$n_{one} = n_0 + n_2 E_{m1}{}^2 \tag{16}$$

$$n_{two} = n_0 + n_2 E_{m2}{}^2 \tag{17}$$

因此，两光波在介质中的速度分别为

$$v_{one} = \frac{c}{n_0 + n_2 E_{m1}{}^2} \tag{18}$$

$$v_{two} = \frac{c}{n_0 + n_2 E_{m2}{}^2} \tag{19}$$

因而

$$\begin{aligned}\Delta v = v_{one} - v_{two} &= \frac{c}{n_0 + n_2 E_{m1}^2} - \frac{c}{n_0 + n_2 E_{m2}^2} \\ &\cong \frac{cn_2}{n_0}\left(E_{m2}^2 - E_{m1}^2\right)\end{aligned} \tag{20}$$

（在式(19)的最后一步中，我们使用了 $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x$ 这一小量近似）

【B2解答】

由题可知，对于这样一个电场强度分布，有

$$E^2 = E_m{}^2 - at^2 \tag{21}$$

由题目所给信息，可以得到当电场强度为0时

$$E_m{}^2 = \frac{a\Delta t_0{}^2}{4} \tag{22}$$

再根据B1，可知两个不同电场，其产生的相位差与距离的关系为

$$\Delta\varphi=\Delta\left(\frac{n\omega s}{c}\right)=\Delta n\frac{\omega s}{c}=\frac{\omega s}{c}n_2E(t)^2 \tag{23}$$

因而

$$\Delta\omega=\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t}=\frac{\omega sn_2}{c}\frac{\partial E(t)^2}{\partial t}=\frac{2\omega n_2 sat}{c} \tag{24}$$

因此

$$\delta\omega=\frac{2\omega n_2 sa\Delta t_0}{c} \tag{25}$$

以及

$$\Delta t_0=\frac{2\pi}{\Delta w_0} \tag{26}$$

将式(26)、(25)代入式(21)则可有

$$\delta\omega=\frac{8\Delta\omega n_2 sE_m{}^2}{\lambda_0} \tag{27}$$

因此

$$s=\frac{K\lambda_0}{8n_2E_m{}^2}\approx 8m \tag{28}$$

分析:

本题重点考察了对于电磁场波动方程的理解。尤其需要注意的是,本题是一道时间与空间上均有变化的问题,因而不妨先假设长度s已知,再通过对时间的变化来求出s的值。其中两个ω尤其需要注意区别,$\Delta\omega$是在某时间下两光波之间频率的差值,而$\delta\omega$是所要求的总变化量,如果概念没有分清,那么之后的解题也就无从谈起了。

【B3 解答】

由题可知,群速度公式为

$$v=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{1}{\beta_1+\beta_2(\omega-\omega_0)} \tag{29}$$

因而群速度关于频率的变化率为

$$\frac{\partial v}{\partial\omega}=\frac{-\beta_2}{\left(\beta_1+\beta_2(\omega-\omega_0)\right)^2} \tag{30}$$

为了使其在时间上进行压缩,必须有群速度的大小与角频率的大小正相关,因此 $\beta_2<0$

【B4 解答】

由B3结果

$$v_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{1}{\beta_1+\beta_2(\omega-\omega_0)} \tag{31}$$

$$\delta\varphi=\left(\frac{\delta\omega l}{v_g}\right)=\delta\omega\ l\beta_2(\omega-\omega_0) \tag{32}$$

因而

$$\omega_0=\frac{\delta\omega\ l\beta_2\Delta\omega}{\Delta t_0} \tag{33}$$

再代入题给等式即有

$$l=\frac{(\Delta t_0)^2}{-2\pi K\beta_2}=4m \tag{34}$$

【B5 解答】

由题可以知道临界角为

$$sin\alpha_c=\frac{1}{1+\frac{n_2}{n_0}E_{m2}^2} \tag{35}$$

设光束半径为a,则最大误差角约为

$$\theta=\frac{\lambda}{a} \tag{36}$$

由题可知,此角很小,因此有小角近似

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\cong cos\theta=sin\alpha_c=\frac{1}{1+\frac{n_2}{n_0}E_{m2}^2} \tag{37}$$

即有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2=\frac{n_2}{n_0}E_{m2}^2 \tag{38}$$

代入

$$W_c=I_cS=\frac{\pi n_0\varepsilon_0 ca^2}{2}E_{m2}^2 \tag{39}$$

化简即有

$$W_c=\frac{\pi^3\varepsilon_0c^3}{n_2\omega_0{}^2} \tag{40}$$

代入相关数据计算,有

$$W_c\approx 26MW$$

分析:

本题主要考察了小角近似以及几何光学内容,难度不大,主要需要考生认真分析所给模型并建立正确的物理模型。这类考题在近两年国内竞赛考试中出现的频率越来越高,可以看出国内竞赛的赛题内容和风格也在向国际赛事靠拢。

【C1解答】

由于系外恒星的光谱发生频率是固定的几个频率，我们可以测得这些频率。而当行星在轨道上运动时，恒星受行星影响产生运动，光波会产生多普勒效应。我们可以根据多普勒光谱的偏移多少以及光强相对大小来判断行星的运动轨道平面和轨道大小。

分析：

这是一道开放问题，没有确定的标准答案，只要物理模型正确即可。主要考核考生的物理思维以及知识储备，这样的题目在如今全国高中生物理竞赛中的考察占比不太可能很高，但也为我们提供了一种思路，也说明了在当今的物理竞赛学习中，知识储备是很重要的。

【C2解答】

由题可知该地外行星的运动速度为

$$v=\frac{2\pi Rm}{TM} \tag{41}$$

根据多普勒效应公式

$$\frac{\Delta f}{f}=\frac{v\cos\varphi}{c-v\cos\varphi}\cong\frac{v\cos\varphi}{c} \tag{42}$$

又因为 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$，因此 $\dfrac{\Delta f}{f}=\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$

我们再将(41)代入(42)便有

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{2\pi Rm}{MTc}\cos\varphi \tag{43}$$

又因为当星球正对地球运动时，其相对地球的速度最大，多普勒频移最明显，因此当 $\varphi=\theta$ 时，是可观察的最大相对频移

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{2\pi Rm}{MTc}\cos\theta \tag{44}$$

【C3解答】

由题，代入数值可得

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\omega}&=\frac{2\pi Rm}{MTc}\cos\theta\\&=\frac{2\pi(1.5\cdot10^{11})\cos60^\circ}{(3.3\cdot10^{5})(31536000)(3\cdot10^{8})}1.5\cdot10^{-10}\\&=2.975\cdot10^{-10}\sim10^{-10}\end{aligned} \tag{45}$$

而当前的观测精度约为

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'}\approx10^{-14} \tag{46}$$

因此该观测精度足够确认发现一颗行星。

分析：

本题更多考察的是模型的构建与题目的理解能力，三问环环相扣。在解答这类题目时，推荐先将所有设问读一遍再根据题目所给思路进行解答。例如本题，初读C1，肯定会觉得没有思路。但再看后两问就发现，题目中所给参数仅有轨道半径周期和两星质量比，因而其解答肯定只和这几个量有关。对这几个物理量进行分析，不难发现，仅有多普勒效应一种可行办法。因而C1的方法设计也就有了最优解。确定方向后C2、C3的解答也就比较简单了。