各向异性的摩擦——国际物理奥赛IdPhO2020理论第二题解答

张圣兵[1]　宋　峰[2]

(1. 江苏省通州高级中学 226300; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

A.1

在摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，速度矢量为 $\boldsymbol{v}$ 时，摩擦力作负功，功率绝对值为

$$|P|=|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}|\propto\mu_x v_x^2+\mu_y v_y^2 \tag{1}$$

式中，v_x和v_y是速度矢量 $\vec{v}$ 的分量，μ_x、μ_y是沿两个主轴x和y的摩擦系数。

且速度大小为定值：

$$v_x^2+v_y^2=v^2=Constant \tag{2}$$

由式(1)(2)得

$$P\propto\mu_x v_x^2+\mu_y\left(v^2-v_x^2\right)=\mu_y v^2+\left(\mu_x-\mu_y\right)v_x^2 \tag{3}$$

题给条件：$\mu_x=0.75$，$\mu_y=0.5$，所以 $\mu_x-\mu_y>0$，

因此，由式(3)可知，v_x取最大值v时，整项有最大值$\mu_x v^2$。

所以，速度沿X轴，$\alpha_1=0$时，功率绝对值达到最大。

A.2

依据题意，摩擦力功率的绝对值小于最大值的1.2倍时，即

$$1.2(\mu_x v_x^2+\mu_y v_y^2)=\mu_x v^2 \tag{4}$$

将式(2)代入，简单运算后，得到

$$1.2\left(\frac{\mu_x}{\mu_y}+\frac{v_y^2}{v_x^2}\right)=\frac{\mu_x}{u_y}\left(1+\frac{v_y^2}{v_x^2}\right) \tag{5}$$

将μ_x=0.75，μ_y=0.5代入，$1.2(1.5+T^2)=1.5(1+T^2)$ (6)

式中，$T=v_y/v_x=\tan\alpha_2$ (7)

解得：

$$\tan\alpha_2=\pm1 \tag{8}$$

则速度矢量应与X轴成的角度为：

$$\alpha_2=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3}{4}\pi \tag{9}$$

A.3

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\mu_x mg\cos\alpha \tag{10a}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-\mu_y mg\sin\alpha \tag{10b}$$

$$v_y/v_x=\tan\alpha \tag{11}$$

所以，$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_y}=\dfrac{\mu_x v_x}{\mu_y v_y}$ (12)

积分可得

$$\mu_y\ln v_x=\mu_x\ln v_y+\mathrm{C} \tag{13}$$

C为积分常数。

将初始速度分量 $v_x=v_{0x}=1$ m/s，$v_y=v_{0y}=1$ m/s代入，得C=0 (14)

于是 $v_x^{\mu_y}=v_y^{\mu_x}$ (15)

当 $v_y=0.25\ m/s$，可计算得到：

$$v_x=0.25^{\frac{0.75}{0.5}}=0.125\ \mathrm{m/s} \tag{16}$$

总速度 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=0.28$ m/s (17)

A.4

摩擦力在垂直于速度的方向上的投影为：

$$F_n = \mu_x mg\sin\alpha\cos\alpha - \mu_y mg\sin\alpha\cos\alpha \tag{18}$$

由 $F_n = m\dfrac{v^2}{R}$ (19)

得到：

$$R = \frac{v^2}{(\mu_x-\mu_y)g\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2v^2}{(\mu_x-\mu_y)g\sin 2\alpha} \tag{20}$$

可得 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi$ 时，曲率半径最小，为：

$$R = \frac{2v^2}{(\mu_x-\mu_y)g} = 0.82\ \mathrm{m} \tag{21}$$

A.5

如果$\mu_x=\mu_y$，x和y方向的加速度分量将正比于初速度分量比，物体将做直线运动。如果$\mu_x>\mu_y$，x方向的速度，与前述情况相比减少的更快，物体的运动偏离直线，如图1所示。偏转方向并不依赖于初速度的方向。如果$\mu_x<\mu_y$，物体将向相反方向偏转。图1给出了$\mu_x=0.75$，$\mu_y=0.5$时，以及$\mu_x=0.4$，$\mu_y=0.7$时物体的轨迹。

B.1

考虑刚开始滑动的瞬间，速度方向与X夹角ϕ，则摩擦力在x,y方向的分量分别为：

$$F_{fr,x} = \mu_x mg\cos\phi \tag{22a}$$

$$F_{fr,y} = \mu_y mg\sin\phi \tag{22b}$$

外力为

$$F_x = \gamma t\cos\alpha \tag{23a}$$

$$F_y = \gamma t\sin\alpha \tag{23b}$$

摩擦力的分力与外力的分力相等：

$$\mu_x mg\cos\phi = \gamma t\cos\alpha \tag{24a}$$

$$\mu_y mg\sin\phi = \gamma t\sin\alpha \tag{24b}$$

消去ϕ，得到：

$$(mg)^2 = (\gamma t)^2\left[\left(\frac{\cos\alpha}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\mu_y}\right)^2\right] \tag{25}$$

因此，时间t与α的关系为：

$$t = \frac{\mu_x\mu_y mg}{\gamma\sqrt{\mu_x^2\sin^2\alpha + \mu_y^2\cos^2\alpha}} \tag{26}$$

C.1

圆周运动速度方向与X夹角等于圆周角ϕ，摩擦力在速度方向分量为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\left(\mu_x\cos^2\phi + \mu_y\sin^2\phi\right) \tag{27}$$

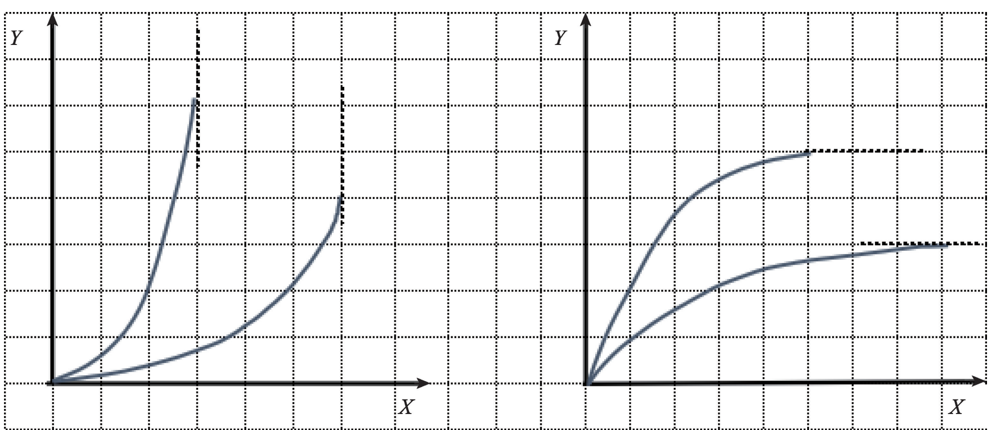
$$v = L\phi \tag{28}$$

所以，

$$-mg\left(\mu_x\cos^2\phi + \mu_y\sin^2\phi\right) = mL\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\phi) \tag{29}$$

求导，并化简：

$$\dot\phi\,\mathrm{d}\dot\phi = -\frac{g}{L}\left(\frac{\mu_x+\mu_y}{2} + \frac{\mu_x-\mu_y}{2}\cos 2\phi\right)\dot\phi\,\mathrm{d}t \tag{30}$$



$\mu_x=0.75$
$\mu_y=0.5$

$\mu_x=0.4$
$\mu_y=0.7$

图1

得

$$\dot{\phi}^2 = \frac{v_0^2}{L^2} - \frac{g}{L}\left[(\mu_x + \mu_y)\phi + \frac{\mu_x - \mu_y}{2}\sin 2\phi\right] \tag{31}$$

积分后得到：

$$v^2 = v_0^2 - gL\left[(\mu_x + \mu_y)\phi + \frac{\mu_x - \mu_y}{2}\sin 2\phi\right] \tag{32}$$

C.2

运动物体的受力在杆上的投影满足：

$$T + F_{fr,x}\sin\beta = m(\dot{\phi})^2 L \tag{33}$$

β为摩擦力与速度的夹角，T为杆的张力。

由C.1，有：

$$T = \frac{mv_0^2}{L} - g\left[(\mu_x + \mu_y)\phi + (\mu_x - \mu_y)\sin 2\phi\right] \tag{34}$$

由B.1可知物体能够移动所需的力与角度有关：

$$F_{\text{need}} = \frac{\mu_x \mu_y mg}{\sqrt{\mu_y^2 \sin^2\phi + \mu_x^2 \cos^2\phi}} \tag{35}$$

$$T \leqslant F_{\text{need}} \tag{36}$$

在 $\phi = 0$ 取最大值 $T = \dfrac{mv_0^2}{L}$ (37)

所以

$$\frac{mv_{0\max}^2}{L} = \mu_y mg \tag{38}$$

计算得到：

$$v_{0\max} = \pm\sqrt{\mu_y gL} = \pm 2.21\ \text{m/s} \tag{39}$$

C.3

令

$$v_{\text{final}}^2 = v_{0\max}^2 - gL\left[(\mu_x + \mu_y)\phi + \frac{\mu_x - \mu_y}{2}\sin 2\phi\right] = 0 \tag{40}$$

计算得到 $\phi \approx 0.338$ rad，乘以半径，得到

$$L\phi = 0.338\ \text{m} \tag{41}$$

本题是一道比较基础的题目，考察了受力分析，力的分解，牛顿第二定律，圆周运动等基本概念和相关知识。数学运算上需要熟练求解方程，进行简单积分。

科苑快讯

水下机器人可能揭开气候之谜

阳光普照的海面之下200米是中深海区，这是人们很少冒险踏足的一段寒冷、黑暗的水域。这个区域被称为“模糊地带”，居住着磷虾、鱿鱼和水母等动物。

过渡带动物在碳循环中扮演着重要的角色，从地表水带来有机碳，并将它们困在潮汐深处。但是，这些害羞的生物非常脆弱，很难被观察到，因此几乎不可能追踪它们的活动，更不用说它们对地球气候的影响了。

现在介绍一下Mesobot，这款自主水下机器人重约250千克，有着黑黄相间的坦克外观。它能在无人工干预的情况下跟踪单个生物超过1天以上，依靠长续航电池和先进的跟踪算法去追踪动物的日常活动。通过一系列传感器和高清摄像头，Mesobot可以帮助科学家了解这片神秘的海洋区域及其中的生物。

Mesobot是系绳机器人，在达到其工作水域前，使用光缆从地面控制和供电，然后释放并控制切换到机载计算机：SmartClump为一组传感器和摄像头，Weights为重物，Lightweight Fiber Optic Cable为轻量光缆

（高凌云编译自2021年7月2日www.sciencemag.org）