振动的带电粒子、磁场中的金属丝和轻杆
——国际物理奥赛IdPhO2020理论第一题解析

苏　俊[1,2]　宋　峰[3]

(1. 华东师范大学教师教育学院 200062;2. 江苏省海安高级中学 226600;
3. 南开大学物理科学学院 300071)

问题1解析:

建立直角坐标系,坐标原点位于立方体中心,三个坐标轴平行于立方体边线。设粒子坐标为(x,y,z),其中 $x<<a$, $y<<a$, $z<<a$ 。

为了分析粒子的受力情况,我们将边长为 a 的立方体分成一个长方体和三个小块,长方体的边长为 $(a-2x)\times(a-2y)\times(a-2z)$,三个小块的厚度分别为 $2x$ 、$2y$ 、$2z$ 的方块。如图1所示。

当粒子位于长方体中心处不受力,我们来分析带电量为 q 的粒子与厚度为 h、长度为 a 的均匀带电小块之间的作用力。小块的电荷密度为 ρ,粒子到小块中心的垂直距离为 $a/2$ 。根据对称性和高斯定理,粒子电通量为:

$$\Phi=\frac{q}{6\varepsilon_0} \tag{1}$$

式中 ε_0 为真空介电常数。

带电粒子所受的作用力为:

$$F=\sigma\Phi=\frac{q\rho h}{6\varepsilon_0} \tag{2}$$

其中电荷面密度为 $\sigma=\rho h$ 。

三个小块对粒子的作用力分别为

$$\vec{F}_1=\frac{q\rho x}{3\varepsilon_0}\hat{x},\ \vec{F}_2=\frac{q\rho x}{3\varepsilon_0}\hat{y},\ \vec{F}_3=\frac{q\rho x}{3\varepsilon_0}\hat{z} \tag{3}$$

则回复力为:

$$\vec{F}=-\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \tag{4}$$

其中 $\vec{r}$ 为位置矢量。

由牛顿第二定律,粒子的运动方程为:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \tag{5}$$

m 为粒子的质量,则回复系数:

$$k=\frac{q\rho}{3\varepsilon_0} \tag{6}$$

根据简谐振动的周期公式:$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,求得:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} \tag{7}$$

解析:本题要求出带电粒子的振动周期,通过高斯定理求出静电力,而回复力来源于静电力,给出回复力与位移的线性关系,得到线性系数即回复系数 k,则可以得到周期 T。

问题2解析:

方法一:

我们考虑线圈上的一小段 $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$,其受到的安培力为:

$$\vec{F}_{\mathrm{amp}}=I\overrightarrow{\mathrm{d}l}\times\vec{B} \tag{8}$$

作用在线元 $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ 上的合力为:

$$\vec{F}=\vec{T}_1+\vec{T}_2+I\overrightarrow{\mathrm{d}l}\times\vec{B}=0 \tag{9}$$

上式中 $\vec{T}_1$ 和 $\vec{T}_2$ 分别是作用在线元两端的电线的张力。将(9)式投影到 $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ 方向,考虑到安培力垂

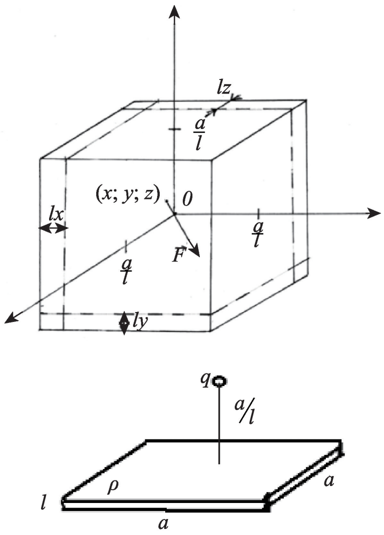

图1

直于 $\vec{dl}$ 方向，可以得到：

$$T_1 = T_2 \tag{10}$$

因此，在两段线圈上张力均为常数，又由于对称性，这两个常数相等，所以整根绳子上张力大小均为常数 T。

对于离线圈顶部悬挂点距离为 l(线元到悬挂点沿绳的长度)的线元 $\vec{dl}$，设其切向矢量为 $\vec{n}(l)$，则可以将(9)式写为：

$$\begin{aligned}&\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + I\vec{dl}\times\vec{B}\\&= T[\vec{n}(l+\mathrm{d}l) - \vec{n}(l)] + I\cdot\mathrm{d}l\cdot\vec{n}(l)\times\vec{B}\\&= \mathrm{d}l\left[T\frac{\mathrm{d}\vec{n}(l)}{\mathrm{d}l} + I\vec{n}(l)\times\vec{B}\right] = 0\end{aligned}$$

可得：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}(l)}{\mathrm{d}l} = -\frac{I}{T}\vec{n}(l)\times\vec{B} \tag{11}$$

由上式可得：

$$\vec{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{n}(l)}{\mathrm{d}l} = 0 \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{n}(l) = \text{常数} \tag{12}$$

即线圈上每一点的切向向量 $\vec{n}$ 都和磁场 $\vec{B}$ 的夹角相同。在水平面上 $\vec{n}(l)$ 随着 l 以匀速旋转，因此我们可以认为线圈的两个部分(最高点到最低点)都缠绕着一个圆柱体，并且与磁场保持着一个固定的角度 α。为了找到此圆柱体的半径，我们将上述表达式投影到水平面：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\vec{n}_{xy}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\vec{n}_{xy}}{\mathrm{d}l_{xy}}\sin\alpha = -\frac{I}{T}\vec{n}_{xy}\times\vec{B}\\&\frac{\sin\alpha}{R} = \frac{IB}{T}\\&R = \frac{T\sin\alpha}{IB}\end{aligned} \tag{13}$$

在线圈的最低点悬挂着重物，在此点三力平衡：两个张力(来自线圈的两部分)以及重物对线圈的拉力(源自于重力，竖直方向)。因此这三个力应该位于同一个竖直平面，线圈的两部分缠绕的圆柱半径相同。线圈形状如图2，线圈上每一点切线方向与竖直方向(即磁场方向)夹角均为 α。线圈分为两段，每一段都是绕着圆柱的螺旋线。

可以算出线圈的半周长：

$$L = \sqrt{H^2 + (\pi R)^2} \tag{14}$$

式中，H 为最低点到最高点高度差，R 是圆柱体的半径。

因此：

$$R = \frac{1}{\pi}\sqrt{L^2 - H^2} = \frac{1}{\pi}L\sin(\alpha) \tag{15}$$

可得到线圈中的张力为：

$$T = \frac{IBR}{\sin(\alpha)} = \frac{IBL}{\pi} \tag{16}$$

于是，我们得到悬挂物的重量为：

$$\begin{aligned}&P = 2T\cos(\alpha) = 2T\frac{H}{L}\\&P = \frac{2IBH}{\pi}\end{aligned} \tag{17}$$

方法二：

稳定的平衡对应于势能的最低点。该题总的势能是重力势能和电流在磁场中能量之和。我们用 S 表示线圈在水平面的投影面积，则有：

$$E_p = -PH - ISB \tag{18}$$

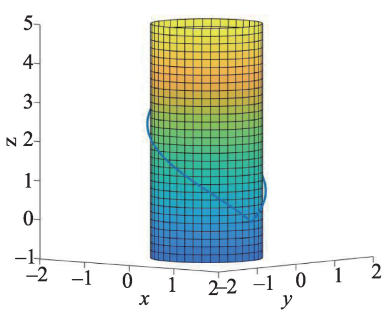

图2

E_p取决于两个变量：H和S。注意到在不改变H的情况下可以改变线圈在水平面的投影面积。所以，在H不变的情况下增加S从而减小势能。势能的最小值对应于S的最大化（在水平平面的周长不变的情况下），即线圈在水平面的投影是一个圆。

而当投影确定之后，H会在线圈与竖直轴成一个固定夹角时达到最大值。因此线圈的形状是柱面上的螺旋线。

则：

$$S=\pi R^2=\frac{1}{\pi}(L^2-H^2) \tag{19}$$

$$E_p=-PH-IB\frac{1}{\pi}\left(L^2-H^2\right) \tag{20}$$

势能的极小值条件是：

$$\frac{\partial E}{\partial H}=0 \tag{21}$$

$$P=\frac{2IBH}{\pi} \tag{22}$$

在重物悬点处力平衡方程为$2\frac{H}{L}T=P$，则

$$T=\frac{LIB}{\pi} \tag{23}$$

讨论：本题可以从受力的角度进行进行，物理过程比较清晰，但是矢量计算比较繁琐。另外也可以能量的角度分析，方法简洁，但是物理过程没有受力分析直观。读者可以从两个角度来理解该问题。

问题3解析：

方法一：

两体系统的质心坐标为$\vec{r}_C=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$，可知质心速度$\vec{v}_C=\frac{d\vec{r}_C}{dt}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$，则质心加速度为：

$$\vec{a}_C=\frac{d\vec{v}_C}{dt}=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}=\frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2}{m_1+m_2} \tag{24}$$

题中两个小球$m_1=m_2=m$，有$2\vec{v}_C=\vec{v}_1+\vec{v}_2$，$2m\vec{a}_C=\vec{F}_1+\vec{F}_2$。

对于两个球体、轻质杆所构成的系统，有3个外力，洛伦兹力、重力与悬挂装置对系统的拉力，下面证明悬挂装置对系统的拉力大小恰好为两个小球的重力大小。注意到杆的质量为0，即杆的加速度为0。分析杆的受力，其受两个小球对杆的作用力$\vec{F}_{1r}$、$\vec{F}_{2r}$和悬挂装置对杆的拉力$\vec{T}$。两个小球受到的重力相同，为$\vec{G}$，洛伦兹力的大小相同，方向相反，$\vec{F}_{1l}=-\vec{F}_{2l}$，以及杆对小球的作用力$-\vec{F}_{1r}$、$-\vec{F}_{2r}$。两个小球的向心力等大反向$\vec{F}_{1c}=-\vec{F}_{2c}$，从而有：

$$\begin{cases}\vec{F}_{1c}=\vec{G}+\vec{F}_{1l}-\vec{F}_{1r}\\ \vec{F}_{2c}=\vec{G}+\vec{F}_{2l}-\vec{F}_{2r}\end{cases} \tag{25}$$

得出$\vec{F}_{1r}+\vec{F}_{2r}=2\vec{G}$，杆所受的合外力为$\vec{F}_{1r}+\vec{F}_{2r}+\vec{T}=\vec{0}$，因此有

$$\vec{T}=-2\vec{G} \tag{26}$$

系统所受的合外力为0，从而给出两个球体质心的运动方程为：

$$2m\dot{\vec{v}}_C=q\left[\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)\times\vec{B}\right]=2q(\vec{v}_C\times\vec{B}) \tag{27}$$

式中$\vec{v}_C$为质心(杆的中点)的运动速度，$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$分别是两个小球的运动速度。在运动开始时，质心速度$v_C=0$，在之后的运动中v_C也是0。以质心为转动中心的方程为：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=q\left[\vec{R}\times(\vec{v}\times\vec{B})\right] \tag{28}$$

利用三矢量叉乘公式$\vec{R}\times(\vec{v}\times\vec{B})=\vec{v}\left(\vec{R}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)$，小球在一个以杆的中心为球心的球面上运动，即$\vec{R}\perp\vec{v}$，$\vec{R}\cdot\vec{v}=0$。(28)式可以简成为：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=q\vec{v}\left(\vec{R}\cdot\vec{B}\right) \tag{29}$$

题中要求$\vec{B}$是沿着z轴的，那么$\left(\vec{R}\cdot\vec{B}\right)=Bz$，式子中的$z$是小球的$z$轴坐标。考虑转动方程的$z$轴分量：

$$\frac{dL_z}{dt}=qv_zBz=qBz\frac{dz}{dt} \tag{30}$$

可解得：

$$L_z=\frac{qBz^2}{2}+C \tag{31}$$

由初始条件$z=0$和$L_z=0$，可以解出$C=0$。

当小球的角动量在z轴上投影到达最大值时，小球速度的z分量为$v_z=\dot{z}=0$，此时系统的角动量$L=L_z=mur$，其中r是小球到z轴的距离，u是小球的速度。另外，小球是在一个以杆的中心为球心的

球面上运动，满足 $r^2+z^2=R^2$。洛伦兹力和杆对小球的作用力不做功，这表明该系统的动能不变，结合质心速度 $\vec{v}_C=0$ 的条件，可以得知 $u=v$。我们可以得到小球角动量的z分量 $L_z=mv\sqrt{R^2-z_{\max}^2}$，代入(31)式，得到一个关于 $z_{\max}$ 的一元四次方程：

$$\left(\frac{qB}{2mv}\right)^2 z_{\max}^4+z_{\max}^2-R^2=0 \quad (32)$$

解得：

$$z_{\max}=\frac{\sqrt{2}\,mv}{qB}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{qBR}{mv}\right)^2}-1} \quad (33)$$

考虑3个正交的单位矢量，第1个沿着小球的速度方向，第2个沿着小球到杆的中心方向，第3个则垂直于前两个单位矢量。在先前的分析中可知 $v=\text{const}$，所以 $a_1=0$。沿着第2个单位的加速度是小球的向心加速度 $a_2=v^2/R$。牛顿第二定律在第3个单位矢量的方向为：$ma_3=qvB\frac{z_{\max}}{R}$。最终得到：

$$a=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+\left(\frac{qvBz_t\max}{mR}\right)^2} \quad (34)$$

方法二：

(33)式由广义动量也可以给出。带电粒子在电磁场中的广义动量为 $\vec{P}=m\vec{v}+q\vec{A}$，$\vec{A}$ 是磁矢势，满足 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$。磁矢势的取法有很多种，$\vec{A}=\frac{1}{2}\hat{\tau}Br$ 是一种满足题设磁场的磁矢势，式中r代表空间点到z轴的距离(即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$)，$\hat{\tau}$ 表示垂直于磁场和空间点所对应的位矢的单位矢量。磁矢势旋度为

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad (35)$$

其中 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 为单位矢量，结合题中的磁场分布，有如下关系：

$$\begin{cases}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B\end{cases} \quad (36)$$

选取磁矢势的解需要一些技巧，观察上述方程组，可以发现，$A_z=0$，且 A_x、A_y 与z无关，可以满足(36)式前两个方程，整理成表达式为：

$$\begin{cases}A_z=0\\ \frac{\partial A_y(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(x,y)}{\partial y}=B\end{cases} \quad (37)$$

可以看出 $A_y=Bx,\ A_x=0$ 或 $A_x=-By,\ A_y=0$ 等都是方程的解，为了方便后续求解，取如下形式：

$$A_y=Bx/2, A_x=-By/2 \quad (38)$$

因而 $\vec{A}=-\frac{1}{2}By\hat{x}+\frac{1}{2}Bx\hat{y}$，小球距离z轴的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\vec{A}=\frac{1}{2}Br\left(\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (39)$$

其中括号内为单位矢量，定义为 $\hat{\tau}$。从磁矢势表达式，可以看出该磁矢势是一个环绕着z轴的环形矢量场，具有圆柱对称性，则柱坐标系下对应的广义动量的分量应该是守恒的。柱坐标系的三个自由变量为 (r,θ,z)，需要注意的是守恒的广义动量分量是由环绕着z轴的场产生的，对应的广义动量是由 θ 产生的角动量：

$$L_z=(\vec{R}\times\vec{P})\cdot\hat{z}=mrv_\perp+\frac{1}{2}qBr^2\equiv\frac{1}{2}qBR^2 \quad (40)$$

上式 $v_\perp$ 是垂直于z轴的速度分量，当小球在z轴的角动量投影达到最大时 $v_z=\dot{z}=0$，有 $v_\perp=v$，得到一个关于 $\rho=\frac{r}{R}$ 的方程：

$$\rho^2+2\kappa\rho-1=0 \quad (41)$$

其中 $\kappa\equiv\frac{mv}{qBR}$，$\rho=\sqrt{\kappa^2+1}-\kappa$ 是正数，可以得到：$z_{\max}=R\sqrt{1-\rho^2}=R\kappa\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\kappa^{-2}+1}-1}$，这个结果化简后和(33)式的结果是一致的。

讨论：本题可以从粒子的角动量角度求解，这也是大家使用的常规方法。另外也可以通过广义动量求解该问题，对物理知识要求较高，有兴趣的同学可以查阅电磁学相关知识作进一步学习。