缪子反常磁矩浅析

李 松 肖 洋 杨金民

（中国科学院理论物理研究所 100190; 中国科学院大学物理科学学院 100049）

1. 引言

北京时间2021年4月7日费米实验室公布了缪子反常磁矩的最新结果，综合布鲁克海文国家实验室的数据后，平均偏差达到了4.2σ[1]。根据高能物理中判定新发现的5σ原则，此次实验结果极大增强了粒子物理学家对于新物理的信心，粒子物理又爆发了新的生命力。

那么为何物理学家们如此关心这个实验结果？其背后会对我们理解我们的世界带来怎样的帮助呢？

其实，物理学家们早在20世纪末就已经建立一个可以描述组成物质的所有基本粒子的理论：标准模型(图1)。标准模型几乎经受了全球粒子物理学家严苛的实验测量，理论与计算几乎完美符合。随着希格斯粒子在大型强子对撞机上的发现，标准模型预言的所有基本粒子都已在实验中观测到，这彰示了标准模型的巨大威力。然而仍有一些重大的问题在标准模型的框架下难以解释，比如：正反物质不对称性、规范等级问题、暗物质，等等。因此寻找超出标准模型的新物理是当今粒子物理学家最重要的课题。

物理学是一门依赖实验的学科，想要找到新物理的存在，必然要以偏离标准模型结果的实验为立足。而费米实验室所公布的反常磁矩结果，正是寻找新物理的粒子物理学家们所希望看到的。物理学家们可以利用此次实验结果，来适当排除一些已有的理论模型，为今后发现新物理提供一个明确的理论方向。

下面本文将简要阐述缪子及缪子的磁矩的概念，讨论缪子相关的实验，并分析新数据对于新物理模型的影响。

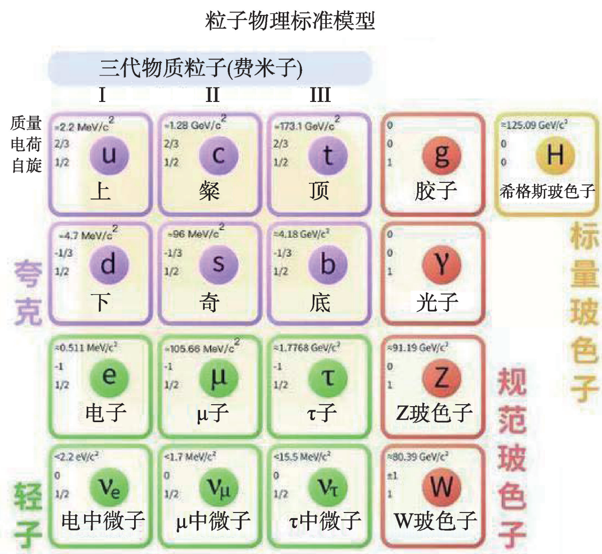

图1 标准模型中的基本粒子(来源于维基百科)

2. 缪子及缪子的磁矩

标准模型中，所有粒子被划分为三类：轻子、夸克和玻色子。轻子和夸克构成我们所看见的物质世界，而玻色子是粒子之间相互作用的桥梁。轻子又被分为3代，每一代由一带电轻子及其相应的中微子构成，而缪子就是第二代轻子，其质量约为电子的200倍。

缪子的磁矩则是缪子自身属性的一种表现形式。为了理解什么是磁矩，我们可以首先考虑一个处于均匀磁场中的矩形线圈，如图2所示。由安培定律可知，线圈所受合力为0，但由于两力并不作用在同一直线上，因此会组成一个绕线圈中心的力矩，这一力矩使得线圈向法线方向 $\vec{e}_n$ 旋转，其力矩

大小为：

$$L=F_{BC}\cdot\frac{a}{2}\sin\theta+F_{DA}\cdot\frac{a}{2}\sin\theta=IabB\sin\theta. \quad (2\text{-}1)$$

考虑到力矩的方向，上式可以利用矢量积表示为：

$$\vec{L}=IS\left(\vec{e}_n\times\vec{B}\right). \quad (2\text{-}2)$$

其中S是线圈的面积。可以证明，对于任意形状的平面线圈，其所受力矩仍是上式[②]。由于 $IS\vec{e}_n$ 是描述线圈本身性质的矢量，为了描述方便，我们可以将其提取出来，定义为磁矩 $\vec{M}$ 。

如果我们经典的看待缪子的轨道运动，可以将其视为一个闭合线圈中的电流，因此会存在一个磁矩[③]。假设A是缪子轨道运动包围的面积，则磁矩的标量式可以表示为：

$$M=IA. \quad (2\text{-}3)$$

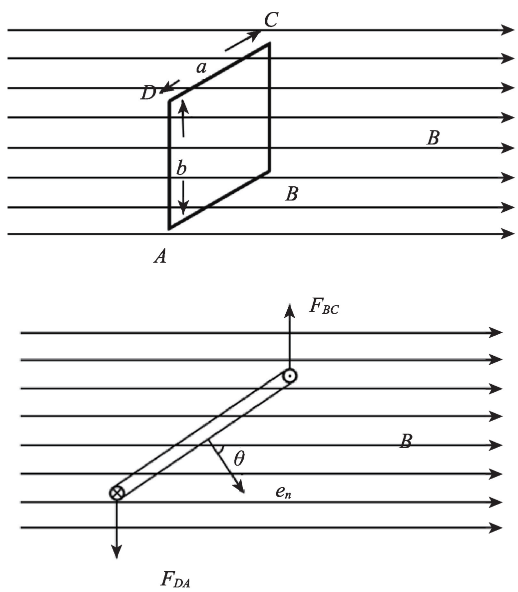

图2　矩形线圈在均匀磁场中所受的力矩

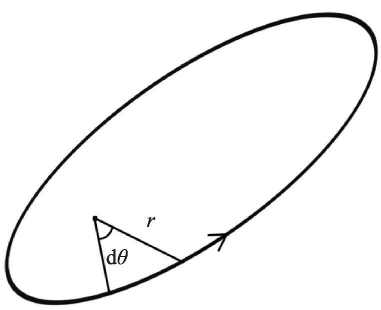

图3　缪子轨道运动

对于轨道上任何一点，缪子每一周期通过一次，因而根据电流定义，$I=e/\tau$ ，τ 为运动一周所需要的时间。

而面积A则可以由简单的积分得出：

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r\cdot r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\tau}\frac{1}{2}r^2\omega\mathrm{d}t=\frac{1}{2m}\int_0^{\tau}mr^2\omega\mathrm{d}t. \quad (2\text{-}4)$$

积分号里的$mr^2\omega$为缪子轨道运动角动量，是一个常量，我们将其提出积分号并记为L，则磁矩可以写为：

$$M=\frac{L\tau}{2m}\cdot\frac{e}{\tau}=\frac{e}{2m}L. \quad (2\text{-}5)$$

同样的，如果我们考虑缪子的经典自旋引起的磁矩，可以将粒子视作带有均匀电荷分布的均匀旋转小球。将小球分解为无穷多的小块，假设每一小块带电 ϵ ，由于每一小块的角动量方向都与球体中心轴平行，因此我们可以直接利用上面的结果，得出粒子自旋运动的磁矩与轨道运动的表达式类似，即：

$$\vec{M}=\frac{e}{2m}\vec{S}. \quad (2\text{-}6)$$

其中 $\vec{S}$ 为缪子的自旋。然而由于经典物理不能完全描述其性质，因此上述公式需要一定的修正。从狄拉克方程可以推出：

$$\vec{M}=\frac{e}{m}\vec{S}. \quad (2\text{-}7)$$

更精确的结果是由施温格(Schwinger)经量子电动力学计算得出的[④]：

$$\vec{M}=\frac{ge}{2m}\vec{S}. \quad (2\text{-}8)$$

其中g为朗德g因子。对于缪子来说，g略微大于2，我们可以定义$a=(g-2)/2$为磁矩反常来衡量g偏离2的程度。通常物理学家直接称呼a为反常磁矩。

接下来我们就从量子电动力学的观点出发，简单介绍其对于g的修正(无量子场论基础的读者，可以直接跳过下面一部分，不会对理解后面内容造成影响)。

带电粒子在磁场 $\vec{B}(x)$ 中的势能可以表示为：

$$V(x)=-\vec{M}\cdot\vec{B}(x). \quad (2\text{-}9)$$

因此，如果我们可以计算出相应粒子在磁场中

的势能，就可以把磁矩找出来。

对于磁矩的计算，我们可以考虑如图4所示的费曼图的过程。图中间的灰色顶角代表光子和费米子之间的相互作用，通常情况下很复杂，我们需要逐阶的考虑其影响。该费曼图所对应的哈密顿量的相互作用项，即带电的费米子和电磁场的耦合可以表达为：

$$\mathcal{H}_I = eA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \tag{2-10}$$

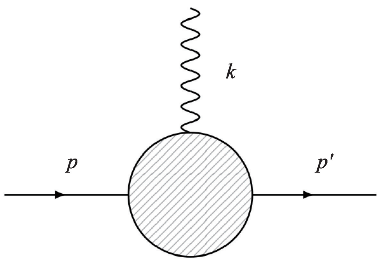

图4 光子–费米子–费米子有效顶点费曼图

其中，$\psi(x)$ 代表我们所研究的粒子，$A_\mu(x)$ 为电磁场矢势，代表我们外加的电磁场，γ为4×4的狄拉克代数表示矩阵：

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-11}$$

由于我们只考虑磁场的影响，因此取 $A_\mu = (0, -\vec{A}(\vec{x}))$。在$\gamma$矩阵的外尔表示下，可以得到电子的自由平面波解(暂时忽略平面波的因子 e^{-ipx})⑤：

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\zeta \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\zeta \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (1-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}/2m)\zeta \\ (1+\vec{p}\cdot\vec{\sigma}/2m)\zeta \end{pmatrix} + O(\vec{p}^2). \tag{2-12}$$

其中的因子 $1/\sqrt{2E_p}$ 是归一化常数，使得 $u^\dagger u$=1。将其代入(2-10)，其表达式为(为了书写简便，此处未明确写出 $A_\mu(x)$ 和 e)：

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) \approx \zeta'^\dagger\left(\frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}}{2m}\sigma^i + \sigma^i\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\right)\zeta. \tag{2-13}$$

利用泡利矩阵相关性质(下式中，ϵ_{ijk} 为列维–奇维塔符号，δ^{ij}为克罗内克函数，I为单位矩阵)：

$$\begin{aligned} &[\sigma^i,\sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma_k, \\ &\{\sigma^i,\sigma^j\} = 2\delta^{ij}I, \\ &2\sigma^i\sigma^j = [\sigma^i,\sigma^j] + \{\sigma^i,\sigma^j\}. \end{aligned} \tag{2-14}$$

可以将(2-13)分解成两部分：

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^i u(p) \approx {} & \frac{(p'+p)^i}{2m}\zeta'^\dagger\zeta \\ & + \left(\frac{-i}{m}\epsilon^{ijk}k^j\right)\zeta'^\dagger\frac{\sigma^k}{2}\zeta, k^i = p'^i - p^i. \end{aligned} \tag{2-15}$$

上述表达式中第一部分不包含σ矩阵，也即和自旋以及磁矩无关，我们可以忽略这一项。对于第二项，由傅里叶变换可知，ip'^i 和$-ip^i$分别对应于$\partial^i\bar{\psi}$和$\partial^i\psi$。但是对于哈密顿密度来说，差一个全导数项不会影响微扰论的结果，于是可以通过分部积分转为对磁矢势的求导，具体地来说，通过给平面波解补回因子 e^{-ipx}，我们有：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-i}{m}\epsilon^{ijk}k^j\right)\zeta'^\dagger\frac{\sigma^k}{2}\zeta \\ \Rightarrow\ & eA^i(x)\frac{-\epsilon^{ijk}}{m}\left[\partial^j(\zeta' e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx}) + (\zeta' e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}\partial^j(\zeta e^{-ipx})\right] \\ & = -\frac{e}{m}A^i(x)\epsilon^{ijk}\partial^j\left[(\zeta' e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx})\right] \\ & = -\frac{e}{m}\epsilon^{ijk}\partial^j(A^i(x))\left[(\zeta' e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx})\right] + (\text{全导数项}). \end{aligned} \tag{2-16}$$

其中全导数项我们可以忽略。由于 $B^k = \epsilon^{kji}\partial_j A^i = -\epsilon^{kji}\partial^j A^i$，我们可以得到:

$$\mathcal{H}_I(\text{SD}) \approx -\frac{e}{m}\vec{B}\cdot\left[(\zeta' e^{-ip'x})^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}(\zeta e^{-ipx})\right]. \tag{2-17}$$

其中SD表示和自旋有关的部分。方括号所在部分正好是粒子自旋，于是我们得到费米子的磁矩为 $(e/m)\vec{S}$，也就是g为2。然而我们仅考虑了树图阶的贡献，所得出的结果不一定准确。

对于一般情况下反常磁矩的讨论，我们需要考虑有效相互作用：

$$-ie\epsilon_\mu(k)\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p). \tag{2-18}$$

其中 ϵ_μ 为光子的极化矢量。考虑 Γ^μ 仅含有一个自由洛伦兹指标以及涉及图4中的所有洛伦兹矢量，Γ^μ 最普遍的形式可以包含：γ^μ、$k^\mu = p'^\mu - p^\mu$、$P^\mu = p'^\mu + p^\mu$ 以及四维反对称张量 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ 与动量的缩并。对于一些具体的形式，我们可以通过一些改写操作使得其化简为其他的形式，如对于 $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu$，我们可以利用 $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$ 与 $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$，把含有 γ 矩阵

缩并的部分改为没有缩并的项;对于四维反对称张量与动量的缩并项以及γ矩阵和动量的缩并项,我们可以利用$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}=i\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta]}\gamma_5$、$\gamma^{\mu}p_{\mu}u(p)=mu(p)$、$\bar{u}(p)\gamma^{\mu}p_{\mu}=\bar{u}(p)m$、$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}$把其改写为不含$\gamma$矩阵和动量缩并的项。总的来说,通过改写操作,$\Gamma^{\mu}$中可以不含有$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$以及$\gamma$矩阵参与缩并的项。所以,最终$\Gamma^{\mu}$的普遍形式必然仅包含如下项:

$$\gamma^{\mu},P^{\mu},k^{\mu},\gamma^{\mu}\gamma_5,P^{\mu}\gamma_5,k^{\mu}\gamma_5.$$

于是[⑥]:

$$\Gamma^{\mu}=\gamma^{\mu}A_1+\frac{P^{\mu}}{2m}A_2+i\frac{k^{\mu}}{2m}A_3+\gamma^{\mu}\gamma_5A_4+\frac{k^{\mu}}{2m}\gamma_5A_5+i\frac{P^{\mu}}{2m}\gamma_5A_6. \tag{2-19}$$

其中在含动量的项里边引入因子$1/2m$可以保证A系数无量纲。有些项含有因子i是为了让A系数为实数从而保证$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}u(p)$为厄米。由于唯一的指标已经由上述项指定,系数$A$仅能是洛伦兹标量,即$A$为$k^2$的函数(其余动量的平方项可以由$k^2$表示出来)。

此外,由于量子电动力学相互作用项为守恒流,因此可以利用Ward恒等式$k_{\mu}\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}u(p)=0$进一步限制$\Gamma^{\mu}$的形式。易知:

$$\begin{aligned}
&k_{\mu}\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)=(\bar{u}(p')\gamma^{\mu}p'_{\mu})u(p)-\bar{u}(p')(\gamma^{\mu}p_{\mu}u(p))=0,\\
&k_{\mu}\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\gamma_5u(p)=(\bar{u}(p')\gamma^{\mu}p'_{\mu})\gamma_5u(p)+\bar{u}(p')\gamma_5(\gamma^{\mu}p_{\mu}u(p))\\
&\qquad=2m\bar{u}(p')\gamma_5u(p),\\
&k_{\mu}P^{\mu}=(p')^2-p^2=0.
\end{aligned} \tag{2-20}$$

所以:

$$k_{\mu}\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}u(p)=\bar{u}(p')\left(i\frac{k^2}{2m}A_3+2m\gamma_5A_4+\frac{k^2}{2m}\gamma_5A_5\right)u(p)=0. \tag{2-21}$$

于是我们得到$A_3=0$,$A_5=-(4m^2/k^2)A_4$。将其代入Γ^{μ}中可以得到:

$$\Gamma^{\mu}=\gamma^{\mu}A_1+\frac{P^{\mu}}{2m}A_2+\left(\gamma^{\mu}-\frac{2mk^{\mu}}{k^2}\right)\gamma_5A_4+i\frac{P^{\mu}}{2m}\gamma_5A_6. \tag{2-22}$$

然后我们利用高登(Gordon)恒等式:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p')\frac{P^{\mu}}{2m}u(p)=\bar{u}(p')\left(\gamma^{\mu}-i\sigma^{\mu\nu}\frac{k_{\nu}}{2m}\right)u(p),\\
&\bar{u}(p')\frac{P^{\mu}}{2m}\gamma_5u(p)=\bar{u}(p')\left(-i\sigma^{\mu\nu}\frac{k_{\nu}}{2m}\gamma_5\right)u(p).
\end{aligned} \tag{2-23}$$

可以将Γ^{μ}改为如下形式[⑥]:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}=&\gamma^{\mu}F_E(k^2)+\left(\gamma^{\mu}-\frac{2mk^{\mu}}{k^2}\right)\gamma_5F_A\\
&+i\sigma^{\mu\nu}\frac{k_{\nu}}{2m}F_M(k^2)+\sigma^{\mu\nu}\frac{k_{\nu}}{2m}\gamma_5F_D(k^2).
\end{aligned} \tag{2-24}$$

上述F系数被称作形状因子。此时,由于哈密顿密度中原本的参数e可能会被形状因子修正,所以不代表实际测量的电荷,因此我们需要重新定义电荷。为此,我们取$A_{\mu}=(\phi(x),\vec{0})$,此时只需要考虑$\Gamma^0$即可。做零阶动量近似,利用:

$$u(p)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta\\ \zeta\end{pmatrix}+O(\vec{p}). \tag{2-25}$$

和

$$\gamma^0\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \gamma^0\gamma^0\gamma_5=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{2-26}$$

我们得到:

$$\bar{u}(p')\Gamma^0u(p)\approx F_E(0)\zeta'^{\dagger}\zeta+O(\vec{p},\vec{p}') \tag{2-27}$$

这相当于在哈密顿密度里边出现如下一项:

$$eF_E(0)\phi(x)\left[(\zeta'e^{-ip'x})^{\dagger}(\zeta e^{-ipx})\right]. \tag{2-28}$$

这一项正是电势,因此$eF_E(0)$是物理观测的电荷。一般我们需要重新定义电荷为e,等价于$F_E(0)=1$,此条件也被称为电荷重正化条件。此时Γ^{μ}的第一项是$\gamma^{\mu}+O(k^2)$,仍然会给出前文得到的结果。

由于我们主要关心量子场论对于磁矩的修正,所以我们在这里重点关注F_M对应的项,其他项的结果读者们可以类似得到。为了讨论问题的方便,我们令$A_{\mu}=\left(0,-\vec{A}(\vec{x})\right)$,结合低能极限下$k_{\nu}\approx(0,-\vec{k})$,$\sigma^{\mu\nu}$只需要考虑其中的空间分量$\sigma^{ij}$即可。另一方面,$F_M$对应的项已经含有动量的一次方,因此可以使用$u(p)$的零阶动量近似,然后利用

$$\gamma^0\sigma^{ij}=\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix}0&\sigma^k\\ \sigma^k&0\end{pmatrix}. \tag{2-29}$$

可得:

$$\bar{u}(p')i\sigma^{i\nu}\frac{k_\nu}{2m}F_M(k^2)u(p)\approx\left(\frac{-iF_M(0)}{m}\epsilon^{ijk}k^j\right)\zeta'^\dagger\frac{\sigma^k}{2}\zeta. \quad (2\text{-}30)$$

对比前面的结果可以知道这相当于在哈密顿密度表达式中增加下面这一项：

$$-\frac{eF_M(0)}{m}\vec{B}\cdot\left[\left(\zeta'e^{-ip'x}\right)^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}\left(\zeta e^{-ipx}\right)\right]. \quad (2\text{-}31)$$

与前述 γ^μ 项的结果组合在一起，得到 $g=2+2F_M(0)$，也就是 $a=F_M(0)$。

在结束我们的讨论之前，我们稍微偏离一下主题，利用类似的方法给出电偶极矩的形式。若我们考虑 $F_D(k^2)$ 这一项的低能哈密顿密度，且令 $A_\mu=(\phi(x),\vec{0})$。这时候只需要考虑 σ^{0i}：

$$\gamma^0\sigma^{0i}\gamma^5=i\begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ \sigma^k & 0\end{pmatrix}. \quad (2\text{-}32)$$

然后：

$$\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}\frac{k_\nu}{2m}\gamma_5F_D(k^2)u(p)\approx\left(\frac{-iF_D(0)}{m}k^i\right)\zeta'^\dagger\frac{\sigma^k}{2}\zeta$$

$$\Rightarrow e\phi(x)\left(\frac{-F_D(0)}{m}\right)ik^i\left[(\zeta'e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx})\right]$$

$$=-\frac{eF_D(0)}{m}\phi(x)\partial^i\left[(\zeta'e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx})\right]$$

$$=-\frac{eF_D(0)}{m}(\partial^i\phi(x))\left[(\zeta'e^{-ip'x})^\dagger\frac{\sigma^k}{2}(\zeta e^{-ipx})\right]+(\text{全导数项})$$

$$\Rightarrow\frac{eF_D(0)}{m}\vec{E}\cdot\vec{S}. \quad (2\text{-}33)$$

其中用到了 $E^i=-\partial_i\phi=\partial^i\phi$。对比电偶极子的势能：$V(x)=-\vec{d}\cdot\vec{E}$，可以知道 $\vec{d}=-\frac{eF_D(0)}{m}\vec{S}$ 是费米子的电偶极矩。

回到对于磁矩的讨论，我们可以发现，对 a 的计算其实就是对 $F_M(0)$ 的计算。实际计算中，我们一般无需得出整个 Γ^μ。因为我们可以利用 γ 代数构造出一个模型无关的投影矩阵 P_M，然后直接计算 $\mathrm{tr}(\Gamma^\mu P_M)$ 即可。

细心的读者可能已经发现，量子场论计算磁矩的方法并没有限定具体的粒子是什么，即任意一个带电轻子都会存在反常磁矩。那么为什么物理学家们偏偏关心缪子的反常磁矩呢？这是因为轻子反常磁矩在高能标新物理下的修正满足[⑦⑧]：

$$\frac{\delta a_l}{a_l}\propto\left(\frac{m_l}{\Lambda}\right)^2. \quad (2\text{-}34)$$

其中 Λ 是新物理能标。从探寻新物理的角度来看，我们需要 m_l 尽可能大，但是目前已知最重的轻子 τ 的寿命很短，以及一些别的原因导致我们很难精确测量它的反常磁矩。另一方面，电子是稳定粒子，而且可以大量产生，但是它的质量很小，约是缪子质量的1/200，这使得电子反常磁矩受新物理的影响没有缪子敏感。于是，缪子是我们借助反常磁矩探寻新物理的不二之选。

3. 缪子反常磁矩的测量

前文已经提及，带电线圈的力矩和磁场、磁矩的关系为式(2-2)：

$$\vec{L}=\vec{M}\times\vec{B}.$$

由于力矩会使物体转动，因此有：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\vec{L}=\vec{M}\times\vec{B}=g\frac{e}{2m}\vec{S}\times\vec{B}. \quad (3\text{-}1)$$

若把缪子看作均匀带电小球，由于存在磁矩，在外磁场下磁矩会绕磁场方向进行旋转，这就是如图5所示的缪子的拉莫尔进动，其旋转的角速度为：

$$\omega=g\frac{e}{2m}B. \quad (3\text{-}2)$$

所以我们只要测量特定时间后的 μ 子自旋改变的角度，就可以计算出 g 了。可是缪子寿命很短，约2.2 μs，通常情况下我们很难观测到它的运动。因此为了观测缪子的运动，我们需要借助狭义相对论的时间膨胀效应来延缓缪子的衰变。另一方面，从技术层面上来说，运动的缪子比静止的缪子更容易操控。所以一般都是通过某种方式产生缪子，之后将其导入存储环，然后测量其在环中的自旋进动。

当然，实验上也不是直接测量缪子的自旋改变，而是测量其衰变产物也就是电子的相关量，具体细节已经超出了本文讨论的范围。但是需要简单提及一下，前文所说用于测量反常磁矩的公式假设了粒子静止，但是在实际情况中，如图6所示，粒

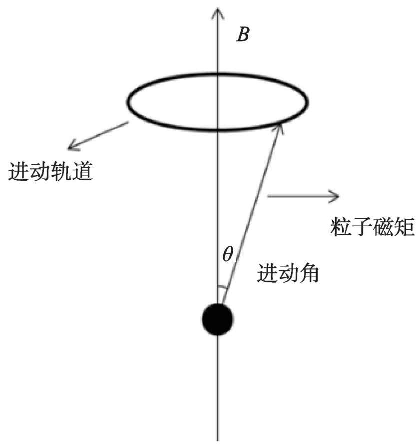

图5 缪子的拉莫尔进动

子是在存储环中运动的，因此我们需要做一个洛伦兹变换来得到实验室参考系下的公式。

最终结果为[8]:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\left(\vec{\omega}_c+\vec{\omega}_a\right)\times\vec{S}. \tag{3-3}$$

其中

$$\vec{\omega}_c=-\frac{e}{\gamma m}\left(\vec{B}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\frac{\vec{E}\times\vec{v}}{c^2}\right)$$

$$\vec{\omega}_a=-\frac{e}{m}\left\{a\vec{B}-a\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c^2}\right)\vec{v}+\left(a-\frac{1}{\gamma^2-1}\right)\frac{\vec{E}\times\vec{v}}{c^2}\right\}. \tag{3-4}$$

如果磁场精确垂直于存储环(一般是不可能精确垂直的)，并且让缪子的速度满足：

$$a=\frac{1}{\gamma^2-1}. \tag{3-5}$$

此时的 $\gamma\approx 29.3$ 被称为魔法伽马因子(magic γ -factor)，这时候 $\vec{\omega}_a$ 可以简化为：

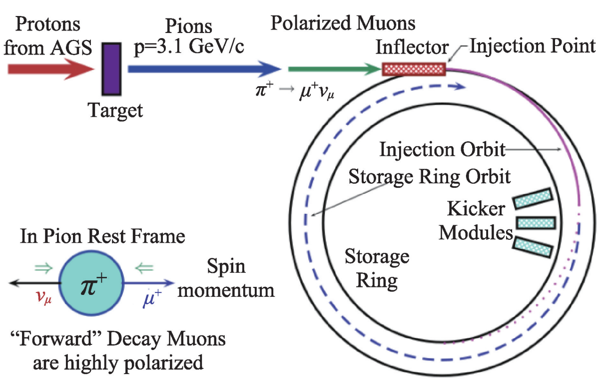

图6 缪子的产生及注入存储[8]

$$\vec{\omega}_a=-a\frac{e}{m}\vec{B}. \tag{3-6}$$

4. 缪子反常磁矩的相关结果及其意义

1998年，布鲁克海文实验室公布了反常磁矩的E821实验数值[9]:

$$a_\mu^{\mathrm{SM}}=11659208.0(6.3)\times10^{-12}. \tag{4-1}$$

该实验达到了前所未有的精度，使得该实验数值对于在电弱能标下可能存在的新物理修正敏感，即可以检验粒子物理学所提出的新物理模型。与此同时，标准模型的理论计算结果也在逐渐完善。通常来说，a_μ 涉及三部分贡献：量子电动力学、弱相互作用、强相互作用[9]。其中量子电动力学贡献主要部分：

$$a_\mu^{\mathrm{QED}}=116584718.9(1)\times10^{-11}. \tag{4-2}$$

弱相互作用贡献为：

$$a_\mu^{\mathrm{EW}}=153.6(1.0)\times10^{-11}. \tag{4-3}$$

然而强相互作用的贡献不能通过微扰论来计算，需要借助对撞机的实验数据来间接得到，因此，a_μ 大部分理论误差都来源于此。强相互作用的贡献可以进一步细分为以下几个部分[10]:

$$\begin{aligned}&a_\mu^{\mathrm{HVP,LO}}=6931(40)\times10^{-11}\\&a_\mu^{\mathrm{HVP,NLO}}=-98.3(7)\times10^{-11}\\&a_\mu^{\mathrm{HVP,NNLO}}=12.4(1)\times10^{-11}\\&a_\mu^{\mathrm{HLBL}}+a_\mu^{\mathrm{HLBL,NLO}}=92(18)\times10^{-11}.\end{aligned} \tag{4-4}$$

综合以上结果可以得到：

$$a_\mu^{\mathrm{SM}}=116591810(43)\times10^{-11}. \tag{4-5}$$

而费米实验室在综合布鲁克海文实验室的数据后，得出的实验值为：

$$a_\mu^{\mathrm{Exp}}=116592061(41)\times10^{-11}. \tag{4-6}$$

理论和实验的偏差为：

$$a_\mu^{\mathrm{Exp}}-a_\mu^{\mathrm{SM}}=251(59)\times10^{-11}. \tag{4-7}$$

偏差达到了4.2σ，如图7所示。这强烈暗示着新物理的可能。不过，对于这个推断，不少物理学家也有争议，其中争执的大部分原因就在于强相互

作用的计算结果。BMW组的格点计算表明：如果强相互作用的计算值采用他们的数值结果，则理论与实验值的偏差将降至1.5σ，并不需要新物理的解释[11]，如图8所示。

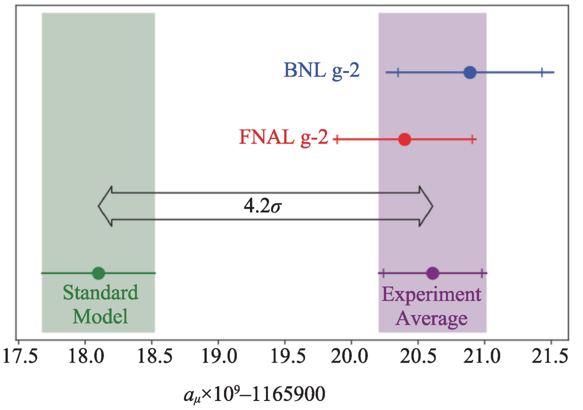

图7 从上到下：来自BNL E821的缪子反常磁矩的实验值、费米实验室的测量值以及合并后的平均值[1]

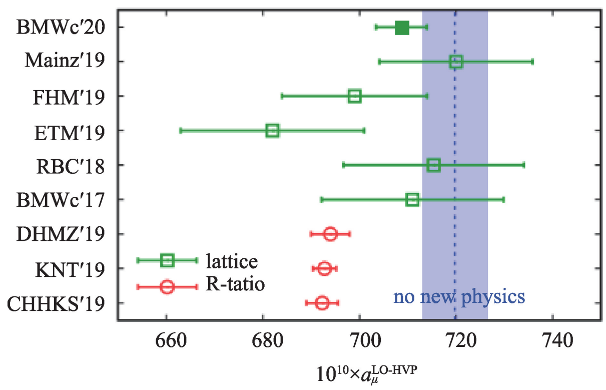

图8 各个小组利用格点计算出的数据[1]

5. 缪子反常磁矩在超对称中的解释

由第二节的讨论我们可以知道，理论上计算反常磁矩的实质就是计算光子-缪子-缪子顶点的量子圈图修正。而当前的实验结果与标准模型的理论计算值的偏差，则意味着我们对于圈图修正的认知可能不全面。如果我们假设存在一些目前还未观测到的粒子，并且这些粒子能够对缪子反常磁矩提供一些圈图修正，就有可能调和目前实验与理论的矛盾。而超对称理论框架则很自然的提供了这样的平台。

在超对称理论下，标准模型中的每一种粒子，都存在一个与其本身统计性质相反的超对称伙伴，如：缪子(费米子)的超对称伙伴为标量缪子smuon(玻色子)，希格斯粒子(玻色子)的超对称伙伴为希格斯微子Higgsino(费米子)。对于反常磁矩，标量缪子和规范微子gauginos(规范玻色子的超对称伙伴)以及希格斯微子贡献主要的一圈修正项。一般情况下，超对称粒子对于a_μ的贡献可以用如下简化公式描述[12]：

$$\delta a_\mu^{SUSY} \sim \tan\beta\left(\frac{100\ \mathrm{GeV}}{M_{SUSY}}\right)^2 10^{-10}. \qquad (5\text{-}1)$$

其中M_{SUSY}代表超对称粒子的平均质量，而$\tan\beta$则是希格斯粒子真空期望值之比，更具体的结果可以参考T. Moroi等人的论文[12,13,14]。因此为了调和实验与理论的差距，M_{SUSY}不能太大，$\tan\beta$不能太小。这就为我们确定超对称模型中的参数提供了指导意义。结合其他有可能存在新物理的实验限制(如暗物质残留密度、LHC实验限制等等)，我们就可以判断相应的超对称模型是否存在同时满足这些实验条件的参数空间，从而确定模型能否存活。图9给出了新实验数据对于最小超对称标准模型参数空间的影响。

图9中M_1,M_2, $M_{\tilde{l}}$,μ分别代表超对称模型中相关的软破缺参数，可以近似地认为其分别代表Bino、Wino、标量轻子(一代和二代简并)和Higgsino的质量。图中蓝色点划线代表真空稳定性的限制，而红色点划线代表ALTAS实验限制。左侧黑色区域代表被Xenon-1T(自旋无关的截面)所排除的区域，右边灰色区域则是暗物质残留密度过大的区域。图中橙色加绿色区域代表满足缪子反常磁矩旧实验数据2σ范围的参数区域，绿色区域代表满足新实验数据2σ范围的参数区域。可以看出，新的缪子反常磁矩的实验数据对参数区域进行了一些压缩。若费米实验室精度进一步提高，则该模型的参数空间会被进一步压缩。若最后没有参数区域可以满足实验限制，则该模型将被排除，这也是通常粒子物理学家利用实验排除模型的一种常用方式。

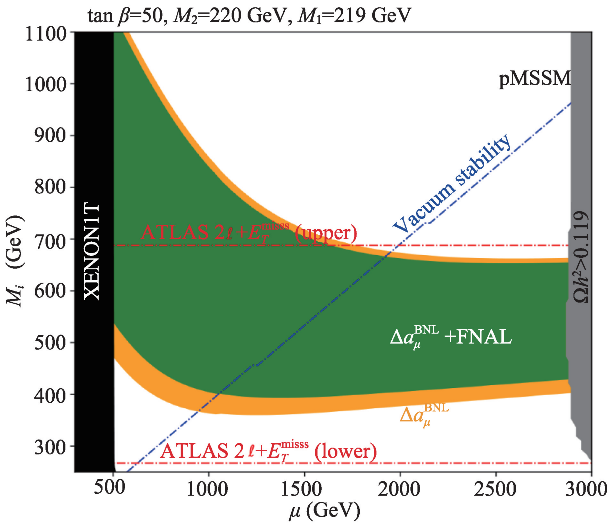

图9 费米实验室反常磁矩数据对于最小超对称模型的限制[14]

6. 展望

如图10所示，目前费米实验室公布的反常磁矩的测量结果只是初步的，现在的结果所用的数据只占最终他们计划取得数据的6%，取数可能在两年内完成。期间实验室将持续更新他们的结果，最终的目标是将现有精度提高至布鲁克海文实验室的4倍左右，并且很有可能将偏差升高至5σ。然而仅仅

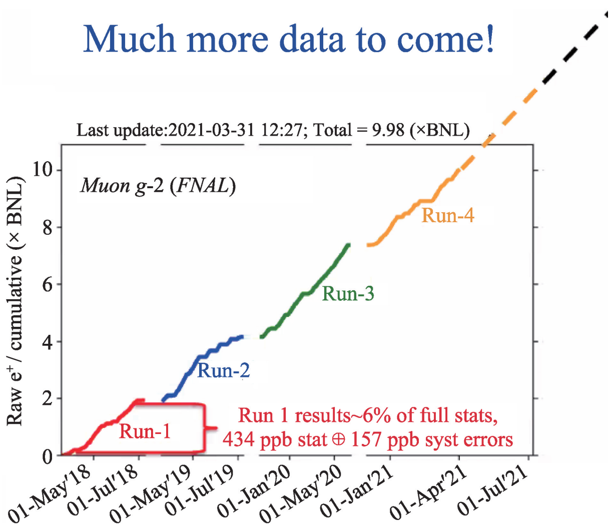

图10 费米实验室研究计划(来源于网络会议)

依靠费米实验室的数据，还不能完全断定新物理的存在。类似于引力波的确认，需要两个实验组同时独立进行实验。目前，日本已经开始筹备相关反常磁矩的实验，来进一步验证费米实验室的测量。可以说，在可见的将来，我们将获得更加精确的实验数据，来判别是否存在新物理。

参考文献

① B.Abi *et al*. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm[J]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126: 14180.

② 赵凯华. 电磁学[M]. 高等教育出版社, 2015.

③ 褚圣麟. 原子物理学[M]. 高等教育出版社, 2005.

④ J. S. Schwinger. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron[J]. Phys. Rev., 1948, 73: 416－417.

⑤ Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to Quantum Field Theory (Frontiers of Physics)[M]. 世界图书出版公司, 1995.

⑥ Jegerlehner F. The Anomalous Magnetic Moment of the Muon[M]. Springer International Publishing, 2008.

⑦ Berestetskii V B, Krokhin O N, Khlebnikov A K. CONCERNING THE RADIATIVE CORRECTION TO THE mu-MESON MAGNETIC MOMENT[J]. Soviet Phys. JETP, 1956, 3.

⑧ Cowland W S. On Schwinger's theory of the muon[J]. Nuclear Physics, 1958, 8: 397-401.

⑨ G. W. Bennett *et al.* Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL[J]. Phys. Rev.D., 2006, 73: 072003.

⑩ T.Aoyama *et al*. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model[J]. arXiv:2006.04822.

⑪ Sz.Borsanyi *et al*. Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD[J]. arXiv:2002.12347.

⑫ T. Moroi. The Muon anomalous magnetic dipole moment in the minimal supersymmetric standard model[J]. Phys. Rev. D, 1996, 53:6565-6575.

⑬ D. Stockinger. The Muon Magnetic Moment and Supersymmetry [J]. J. Phys. G, 2007, 34: R45－R92.

⑭ Fei Wang *et al*. GUT-scale constrained SUSY in light of new muon g-2 measurement[J]. arXiv:2104.03262v1.