第50届国际物理奥林匹克竞赛实验试题第一题解答

惠王伟　宋　峰

(南开大学物理科学学院　300071)

第50届国际物理奥林匹克竞赛实验试题第一题是光学测量，主要内容有三部分，分别为：圆盘折射率测量，衍射光栅参数测量，三棱镜折射率测量。本文在大赛提供的答案的基础上对本题进行了重新解答。

A部分：圆盘的折射率(5.5分)

A.1(1.0分)

本题是通过观察光束在圆盘内的传播路径来测量折射率。图1为N=3时的实验装置示意图。

实验中，只需要测量α和δ，通过题目中给出的公式就可以计算出折射角β。入射角在15°至75°的范围内，测量及计算的结果如表1所示。

A.2 (1.0分)

利用上一步测量的数据，可以画出$\sin\alpha$和$\sin\beta$的关系曲线，如图2所示。通过计算可以得到折射率 $n = 1.53 \pm 0.02$

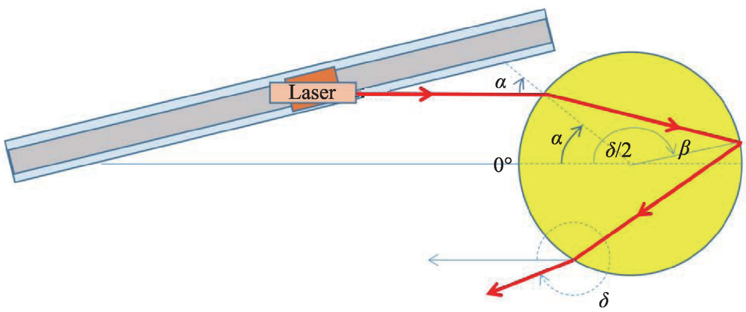

图1　A.1部分实验装置示意图

表1　A.1部分测量数据和计算数据

α(°)	$\Delta\alpha$(°)	$\delta/2$(°)	$\Delta\delta/2$(°)	δ(°)	$\Delta\delta$(°)	β(°)	$\sin\alpha$	$\sin\beta$
15	0.25	174.5	0.25	349	0.5	10.25	0.259	0.178
20	0.25	173	0.25	346	0.5	13.5	0.342	0.233
25	0.25	172	0.25	344	0.5	16.5	0.423	0.284
30	0.25	171	0.25	342	0.5	19.5	0.500	0.334
35	0.5	170	0.25	340	0.5	22.5	0.574	0.383
40	1	169.5	0.25	339	0.5	25.25	0.643	0.427
45	1	169	0.25	338	0.5	28	0.707	0.469
50	1	169	0.25	338	0.5	30.5	0.766	0.508
55	1	169	0.25	338	0.5	33	0.819	0.545
60	1.5	170	0.25	340	0.5	35	0.866	0.574
65	1.5	171	0.5	342	1	37	0.906	0.602
70	1.5	173.5	1	347	2	38.25	0.940	0.619
75	2	176.5	1.5	353	3	39.25	0.966	0.633

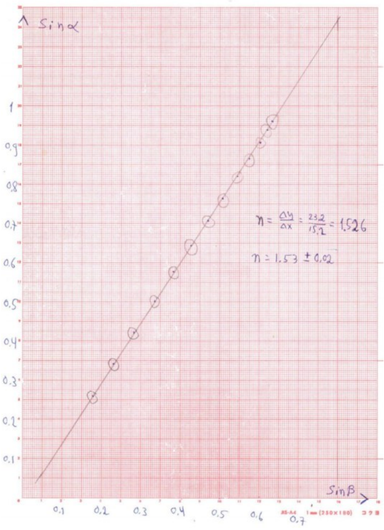

图2 sinα和sinβ的关系曲线图

A.3 (1.0分)

利用A.1中测量的数据，可以得到δ与α的函数关系图，图中每个测量点上用直条标记$\Delta\delta$和$\Delta\alpha$的值，如图3所示。通过观察远程屏幕，可以准确找到δ最小的点，$\delta = 338° \pm 5°$，$\alpha = 49° \pm 0.25°$。

A.4 (0.7分)

通过对图3进行观察分析，可知当δ最小时，$\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$。将关系式$\delta = 2\alpha + (N-1)(180° - 2\beta)$对$\alpha$求导，可以得到$2 - 2(N-1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$，因此$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{N-1}$。

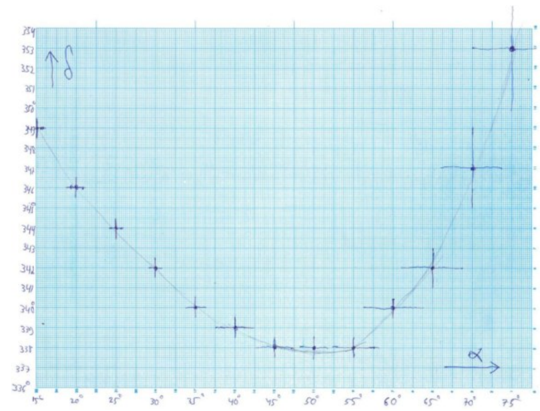

图3 δ与α的函数关系图

对菲涅尔公式$\sin\alpha = n\sin\beta$求导，可以得到$cos\,\alpha = n\cos\beta\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{n\cos\beta}{N-1}$。再对这个结果以及菲涅尔公式求平方并求和可以得到：

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = n^2\sin^2\beta + \frac{n^2\cos^2\beta}{(N-1)^2},$$

因此$\frac{1}{n^2} = \sin^2\beta + \frac{\cos^2\beta}{(N-1)^2}$。这样就得到了材料折射率$n$和折射角$\beta$的关系式。由于光束在圆盘内的多次反射，通过跟踪光束击中圆盘-空气界面的所有点，可以非常精确地测量折射角β。

A.5 (0.8分)

光束路径图如图4所示，图中标明了测量的物理量，其中γ=180°−2β。实际上，光束在圆盘内部经

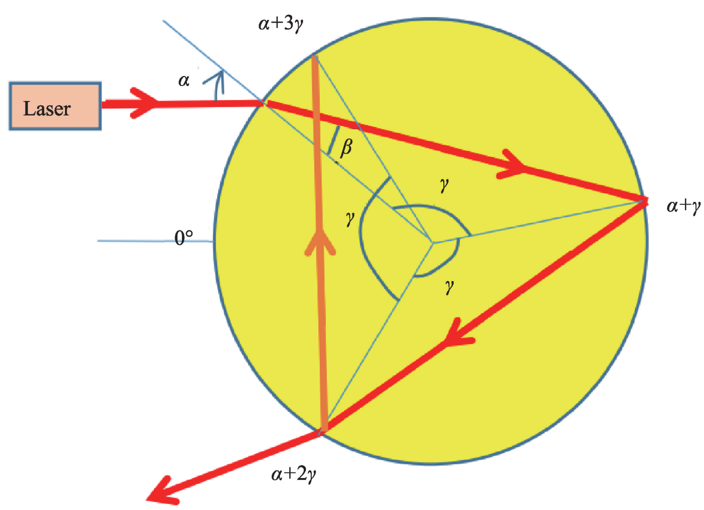

图4 光束路径图

过两次反射后，在非常靠近入射点的点处出射。测量k次反射后光束击中界面的点的角位置，测量数据如表2所示。

表2　A.5部分测量数据

k	$\alpha+k\gamma$
0	49
1	168.5
2	288.5
3	409

注意：对于$N=3$的情况，无法像本例中那样测量$k>3$的点，因为在这种情况下，从$k=3$开始，冲击点与先前的点在一起。绘制$y=\alpha+k\gamma$与k的关系曲线，如图5所示。

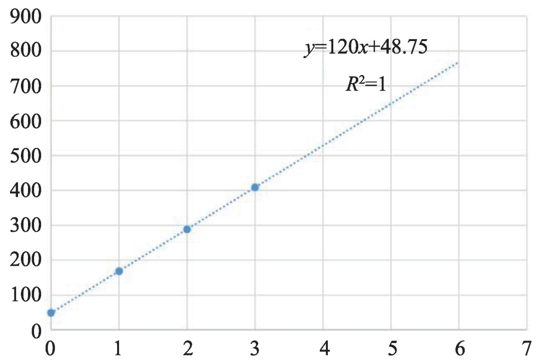

图5　$\alpha+k\gamma$与k的函数关系图

利用γ=120°，可以得到β=30°。利用A.4得到的公式可以得到：

$$n=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta+\dfrac{\cos^2\beta}{(N-1)^2}}}=1.512$$

A.6 (1.5分)

本题要求对N=4和N=5，重复A.5的过程，得到折射率，并计算平均折射率。首先确定经过4次或5次反射/折射后射出的光束，然后改变入射角找到N=4和N=5时的$\delta_{\min}$。测量数据如表3所示。

表3　A.6部分测量数据

N=4		N=5	
k	$\alpha+k\gamma$	k	$\alpha+k\gamma$
0	67	0	67
1	172	1	172
2	278	2	278
3	383	3	383
4	488	4	488
5	593	5	593
6	688.5	6	688.5

根据测量数据绘制$y=\alpha+k\gamma$与k的关系曲线，如图6所示。N=4时，得到折射率$n=1.511$；N=5时，得到折射率$n=1.519$。将三次的结果平均可以得到：

$$n=\frac{1.519+1.511+1.512}{3}=1.514\pm0.004$$

A部分评述

A部分主要研究的是圆盘的折射率。解题者需要利用两种方法测量圆盘的折射率。第一种传统测量方法相对简单，但在测量数据时，要注意在题目要求的最大范围内均匀取点，并且要满足一定的测量次数。第二种测量方法需要解题者通过分析传统方法测量得到的图形特征，并利用题目中给定的信息和菲涅尔公式，从而推导出材料折射率n和折射角β的关系式，通过测量折射角β，计算出圆盘折射率。

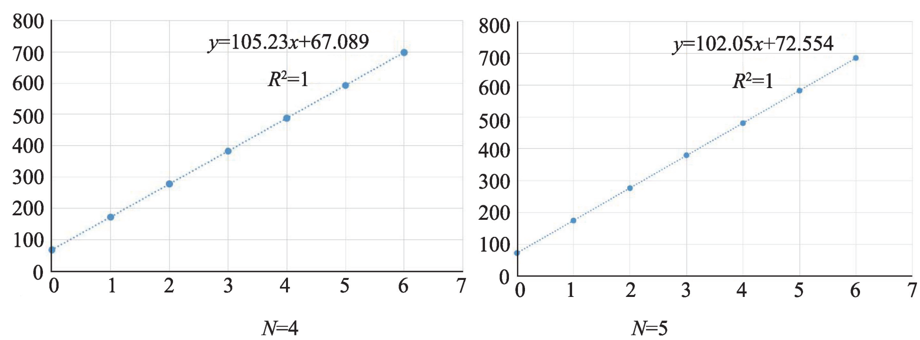

图6　$\alpha+k\gamma$与k的函数关系图

B部分：衍射光栅的参数(2.5分)

B.1(0.7分)

首先在桌子上标记一个点Q，距离屏幕(实验隔间的墙壁)约$H = 70$ cm，并与实验隔间的侧壁保持同等距离。使用给定的卷尺，在屏幕上标记P_1和P_2两个点，这两个点在Q点的左右两侧，距离Q点100 cm。然后在P1和P2的中间标记一个P点。让激光器光束通过Q和P点，垂直于屏幕。

标准方法：

放置光栅，使光束穿过它。通过轻轻旋转光栅，确保1和−1以及2和−2级衍射关于0级对称。注意，零级衍射在屏幕上的位置不依赖于α，在这种情况下，可以假定光束在光栅上的入射角为$\alpha = 0$

实验装置图如图7所示，我们将测量H，L_1和L_2，并利用$d\sin\theta_m = m\lambda$。测量值为：$2L_1 = 53.3$ cm，$2L_2 = 163.5$cm，$H = 60.8$cm。所以m=1时，λ/d=0.4015，m=2时，λ/d=0.4012。

B.2(1.8分)

第二种方法：

当α=0时，获得更高级次的衍射是不可能的。因此，可以通过改变α，从而改变θ_m，可以找到θ_m的最小值。通过将关系式$d\cdot(\sin\alpha + \sin(\theta_m - \alpha)) = m\lambda$对$\alpha$求导，在$d\theta_m/d\alpha = 0$处可以得到$\cos\alpha - \cos(\theta_m - \alpha) = 0$，即$\alpha = \theta_m/2$，所以$2d\sin(\theta_m/2) = m\lambda$。实验过程中不需要测量$\alpha$，只是通过改变$\alpha$来确定$\theta_m$的最小值。

m=3的装置示意图如图8所示，通过改变α找到$\theta_{3\min}$，测量可以得到$H = 67.0$cm，$L = 100.2$cm，$h_3 = 37.8$cm。通过计算可以得到$\tan\theta_{3\min} = 3.432$，所以$\theta_{3\min} = 73.75°$，$\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{3}\sin\frac{\theta_{3\min}}{2} = 0.400$。

对m=4进行测量，通过改变α找到$\theta_{4\min}$，测量可以得到$H = 67.0$cm，$L = 100.2$cm，$h_4 = 96.3$cm。通过计算可以得到$\theta_{4\min} = 106.3°$，$\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{4}\sin\frac{\theta_{4\min}}{2} = 0.400$。

B部分评述

本题主要是研究衍射光栅的相关参数，通过测量屏幕上的衍射图像可以测量激光波长λ与衍射光栅光栅常数d之间的比值。高级次衍射可以使得波长之间更好地分离，使用高衍射级次能够提高λ/d的测量精度。但当α=0时，无法获得高级次的衍射。这就需要通过改变α，找到θ_m的最小值，从而实现更高衍射级的测量。

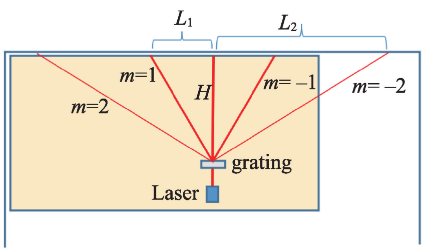

图7　B.1装置示意图

C部分：三棱镜的折射率(2.0分)

C.1(0.4分)

从激光光束路径图和光路可逆原理可知，如果

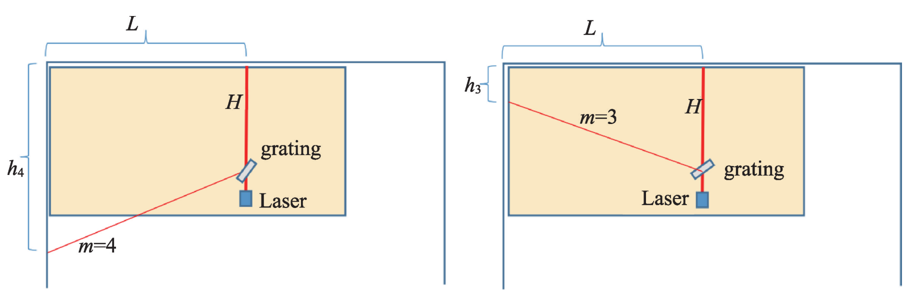

图8　B.2装置示意图

交换角度α_1和α_2，δ不变化。因此在对称的情况下，即$\alpha_1=\alpha_2$，δ达到极值(实际上是最小值)，此时，$\beta_1=\beta_2=\phi/2$。对称情况下，入射角α保持$\alpha=\delta/2+\phi/2$，根据菲涅尔定律，可以得到$\frac{\delta}{2}+\frac{\phi}{2}=n\sin\frac{\phi}{2}$。

如果棱镜不完全是等边的，将用$\phi_i=60°+2\varepsilon_i$标记棱镜的角度。从三角形的内角和可以得到$\sum\varepsilon_i=0$，此外$\beta_i=30°+\varepsilon_i$。在这种情况下，$\delta_{\min}=\delta_0+2\Delta_i$，其中$\delta_0$是$\phi=60°$时的最小值。

由菲涅尔定律可知$\sin\left(\frac{\delta_0}{2}+30°+\Delta_i+\varepsilon_i\right)=n\sin(30°+\varepsilon_i)$，利用小角度近似可得：

$$\sin\left(\frac{\delta_0}{2}+30°\right)+\cos\left(\frac{\delta_0}{2}+30°\right)(\Delta_i+\varepsilon_i)$$
$$=n\sin 30°+n\cos 30°\cdot\varepsilon_i$$

通过上面公式可以得到$\cos\left(\frac{\delta_0}{2}+30°\right)(\Delta_i+\varepsilon_i)=n\cos 30°\cdot\varepsilon_i$。对三个角求平均可以得到$\langle\Delta_i\rangle=0$，因此$n=2\sin\left(\frac{\langle\delta_{\min}\rangle}{2}+30°\right)$

C.2(1.6分)

本题需要利用桌子的长度尽可能地扩大距离。按照实验装置示意图(图9)搭建装置，以便在没有棱镜的情况下，激光束能垂直入射到屏幕上(隔间的墙壁)。利用胶带将棱镜支架底座固定在桌子上，将棱镜支架和棱镜放置在上面。旋转棱镜以找到最小偏转角$\delta_{\min}$。然后，对棱镜的每个角重复测量$\delta_{\min}$，数据如表4所示。

计算$\delta_{\min}$的误差：

$$\tan\delta_{\min}=\frac{h}{L} => \frac{1}{\cos^2\delta_{\min}}\Delta\delta_{\min}=\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2+\left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$$

表4 测量数据

Corner No.	L	h	$\delta_{\min}$
1	141.6±0.2 cm	175.2±0.3 cm	51.05°±0.1°
2	141.0±0.2 cm	167.1±0.3 cm	49.84°±0.1°
3	140.7±0.2 cm	171.4±0.3 cm	50.62°±0.1°

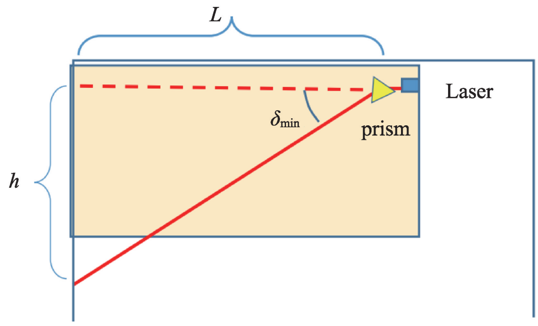

图9 C.2装置示意图

$$\Delta\delta_{\min}=\cos^2\delta_{\min}\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2+\left(\frac{h\Delta L}{L^2}\right)^2}$$

代入测量数据得$\Delta\delta_{\min}=0.1°$，$\Delta\langle\delta_{\min}\rangle=\frac{0.1°}{\sqrt{3}}=0.06°=1\times10^{-3}\ \text{rad}$，$\delta_{\min}$的平均值为$\langle\delta_{\min}\rangle=50.50°$。因此棱镜的折射率为：

$$n=2\sin\left(\frac{\langle\delta_{\min}\rangle}{2}+30°\right)=2\sin 55.25°=1.6433。$$

$$\Delta n=2\cos 55.25°\times0.5\Delta\langle\delta_{\min}\rangle=\cos 55.25°\times1\times10^{-3}$$
$$=6\times10^{-4}$$

因此$n=1.6433\pm0.0006$。

C部分评述

本题主要研究的是三棱镜的折射率。解题者通过分析激光光束路径图，结合题目中给出的公式和提示，可以推导出折射率n与最小偏转角$\delta_{\min}$的关系式。通过旋转棱镜就可以找到最小偏转角$\delta_{\min}$，从而设计出了一种能够以更高精度求出棱镜折射率的方法。在解题过程中要给出详细的推导过程，写出计算公式，并且要估算折射率的不确定度。