热声热机的解答

房　颐[1]　宋　峰[2]

(1. 南京师范大学附属中学 210003;2. 南开大学物理科学学院 300071)

传统的热机按一定的热力学循环要求,用热机的机械结构和运动规律组织工作介质的状态变化,实现热能与机械能之间的转变。热声热机则是运用热声原理在一定的几何和热力环境条件下,利用系统与工质自身性质及各个部分之间进行的一种热力学自组织过程实现热能与机械能之间的转化。实践中可以实现无运动部件的热机系统。2019年国际物理奥林匹克竞赛理论第三题就是以热声热机为背景的。本文在大赛提供的答案的基础上对本题进行了解答。

本文将用到的相关物理量:

x　气体微团平衡位置坐标

u　气体微团离开平衡位置的位移

a　气体微团振幅

V　气体微团体积

V_0　气体微团平衡状态的体积

V_1　气体微团体积振幅

p　气体微团压强

p_0　气体微团平衡状态的压强

p_1　气体微团压强振幅

ρ_0　气体微团平衡状态的密度

T　气体微团温度

T_0　气体微团平衡状态的温度

T_1　气体微团温度振幅

ω　圆频率

k　波数

γ　绝热指数

L　绝热管长度

S　绝热管横截面积

c　声速

T　堆栈板高低温热源的温差

τ_{cr}　临界温差

l　堆栈板沿绝热管方向的长度

T_{env}　气体微团附近堆栈板温度

T_{plate}　堆栈板上某处温度

W　单位体积气体的声学功

W_{tot}　堆栈板里气体一个周期内产生的总功

A部分:封闭管中的声波

A.1 已知当声在管中形成驻波时,每个气体微团相对其平衡位置x的纵向位移为

$$u(x,t)=a\sin kx\cos\omega t=u_1(x)\cos\omega t \tag{1}$$

由于管两端固定,所以边界条件为$u(0,t)=u(L,t)=0$,其中

$$u(L,t)=a\sin kL\cos\omega t=0, \tag{2}$$

所以

$$\sin kL=0,\ kL=\frac{2\pi}{\lambda}L=n\pi\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots) \tag{3}$$

当$n=1$时,最大波长为

$$\lambda_{max}=2L \tag{4}$$

接下来本题讨论驻波型热声热机。

A.2 气体微团的体积

$$\begin{aligned}V(x,t)&=[\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)]S\\&=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta xS=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)V_0\end{aligned} \tag{5}$$

将(1)式代入,得

$$V(x,t)=V_0+(akV_0\cos kx)\cos\omega t=V_0+V_1(x)\cos\omega t \tag{6}$$

所以

$$V_1(x)=akV_0\cos kx \tag{7}$$

A.3 由于假设热力学性质的变化与未受扰动

时的值相比都是小量，对一个气体微团（如图1所示），由牛顿第二定律得

$$-[p(x+\Delta x,t)-p(x,t)]S=\rho_0 S\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

即

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9}$$

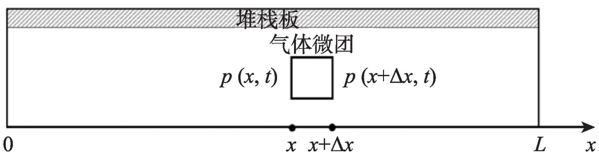

图1　气体微团两边压强示意图

将(1)式代入得

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho_0 a\omega^2\sin kx\cos\omega t \tag{10}$$

所以

$$p(x,t)=p_0-\left(a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos kx\right)\cos\omega t=p_0-p_1(x)\cos\omega t \tag{11}$$

所以

$$p_1(x)=a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos(kx), \tag{12}$$

A.4　根据绝热方程

$$p_0V_0^\gamma=p(x,t)V(x,t)^\gamma=[p_0-p_1(x)\cos\omega t][V_0+V_1(x)\cos\omega t]^\gamma \tag{13}$$

由于$p_1(x)<<p_0$、$V_1(x)<<V_0$，一阶近似得

$$p_0V_0^\gamma\approx p_0V_0^\gamma\left[1+\left(\gamma\frac{V_1(x)}{V_0}-\frac{p_1(x)}{p_0}\right)\cos\omega t\right] \tag{14}$$

应有

$$\frac{p_1(x)}{p_0}=\gamma\frac{V_1(x)}{V_0} \tag{15}$$

将(7)式和(12)式代入，得

$$\frac{\rho_0}{p_0}\frac{\omega^2}{k}=\gamma k,\quad c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\gamma\frac{\rho_0}{p_0}} \tag{16}$$

A.5　由理想气体状态方程得

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p(x,t)V(x,t)}{T(x,t)}=\frac{[p_0-p_1(x)\cos\omega t][V_0+V_1(x)\cos\omega t]}{T_0-T_1(x)\cos\omega t} \tag{17}$$

由于$p_1(x)<<p_0$、$V_1(x)<<V_0$，一阶近似得

$$T_1(x)=\left(\frac{p_1(x)}{p_0}-\frac{V_1(x)}{V_0}\right)T_0 \tag{18}$$

将(15)式和(7)式代入，得

$$T_1(x)=(\gamma-1)\frac{V_1(x)}{V_0}T_0=ak(\gamma-1)T_0\cos(kx) \tag{19}$$

A.6　绝热管内气体微团的运动沿管传递热量。为了确定热流的方向，将(4)式代入(1)式和(19)式，得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=a\sin\frac{\pi}{L}x\cos\omega t,\\ T(x,t)&=T_0-T_1(x)\cos\omega t\\ &=T_0-ak(\gamma-1)T_0\cos\frac{\pi}{L}x\cos\omega t\end{aligned} \tag{20}$$

可以看到，对于$0<x<\frac{L}{2}$的气体微团，当位移为正时，气体温度变低；对于$\frac{L}{2}<x<L$的气体微团，当位移为负时，气体温度变低。所以，在B点附近热量流入气体，使B点附近温度降低；而在A点和C点附近，热量从气体流出，使A点和C点附近温度升高。

A部分评述

A部分从一开始将本题的研究对象确定为驻波型热声热机。在驻波型热声热机中，不同位置处的气体微团的体积、压强和温度均在平衡值附近做微小的周期性变化，并且不同位置处周期性变化的振幅不同。为了方便研究，取某气体微团作为研究对象，由于声波频率下，可忽略气体的热传导，将气体微团的膨胀和收缩当作纯粹的绝热过程，即满足关系$pV^\gamma=$常数。本部分只要对气体微团做受力分析，并结合题目条件，对绝热过程做一阶近似，即可得到答案。

B部分：外部热接触引起的声波放大

B.1　对于$x_0=L/4$处的气体微团，由(1)式得其t时刻的位置为

$$x=x_0+u(x_0,t)=\frac{L}{4}+a\sin\left(\frac{\pi}{L}\frac{L}{4}\right)\cos\omega t$$
$$=\frac{L}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\omega t \tag{21}$$

代入 $T_{\mathrm{plate}}(x)=T_0-\frac{x-x_0}{l}\tau$ 得

$$T_{\mathrm{plate}}=T_0-\frac{\tau}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\omega t=T_0-T_{\mathrm{st}}\cos\omega t=T_{\mathrm{env}}(t) \tag{22}$$

所以

$$T_{\mathrm{st}}=\frac{\sqrt{2}a\tau}{2l} \tag{23}$$

B.2 为了使气体从高温热库吸热、向低温热库放热(即作为热机使用,如图2所示),需要气体微团位移u为正时温度高于环境温度,而位移u为负时温度低于环境温度,即:

$$\begin{cases}T_{\mathrm{env}}>T & (u(x_0,t)<0)\\ T_{\mathrm{env}}<T & (u(x_0,t)>0)\end{cases} \tag{24}$$

将(19)式和(22)式代入,得

$$\frac{\tau}{l}>k(\gamma-1)T_0,\quad 即\tau>kl(\gamma-1)T_0 \tag{25}$$

所以温度差的临界值为

$$\tau_{\mathrm{cr}}=kl(\gamma-1)T_0 \tag{26}$$

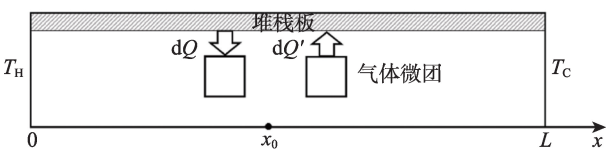

图2 作为热机使用的热声热机气体微团吸放热示意图

B.3 由热力学第一定律

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V \tag{27}$$

其中理想气体的内能

$$E=\nu C_{V,\mathrm{m}}T=\frac{\nu RT}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}pV \tag{28}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}(pV)}{\mathrm{d}t}+p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma-1}V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$
$$+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\approx\frac{1}{\gamma-1}V_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{29}$$

B.4 将

$$\begin{cases}p=p_0+p_a\sin\omega t-p_b\cos\omega t\\ V=V_0+V_a\sin\omega t+V_b\cos\omega t\end{cases} \tag{30}$$

代入(29)式得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma-1}V_0(p_a\omega\cos\omega t+p_b\omega\sin\omega t)$$
$$+\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0(V_a\omega\cos\omega t-V_b\omega\sin\omega t)$$
$$=\beta V_0(T_{\mathrm{st}}-T_1)\cos\omega t \tag{31}$$

令等式两边 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 项前面的系数分别相等,得

$$\begin{cases}\frac{1}{\gamma-1}V_0p_a\omega+\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0V_a\omega=\beta V_0(T_{\mathrm{st}}-T_1)\\ \frac{1}{\gamma-1}V_0p_b\omega-\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0V_b\omega=0\end{cases} \tag{32}$$

将(19)式、(23)式和(26)式代入,解得

$$\begin{cases}V_a=-\left[\frac{1}{\gamma}p_a+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\beta}{\omega}\frac{\sqrt{2}a}{2l}(\tau-\tau_{\mathrm{cr}})\right]\frac{V_0}{p_0}\\ V_b=\frac{1}{\gamma}p_b\frac{V_0}{p_0}\end{cases} \tag{33}$$

B.5 在一个周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 内由气体微团产生的每单位体积的声学功 $w=\frac{1}{V_0}\int_T p\mathrm{d}V$,将(30)式代入,得

$$w=\frac{1}{V_0}\int_T p\mathrm{d}V=\frac{1}{V_0}\int_0^T(p_0+p_a\sin\omega t-p_b\cos\omega t)$$
$$\times(V_a\omega\cos\omega t-V_b\omega\sin\omega t)\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{V_0}\pi(p_aV_b+p_bV_a) \tag{34}$$

将(33)式代入,得

$$w=\frac{\pi}{\omega}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\beta\frac{\sqrt{2}a}{2l}(\tau-\tau_{\mathrm{cr}})\cdot\frac{p_b}{p_0} \tag{35}$$

考虑到气体微团受到堆栈板的影响较小,所以

$$p=p_0+p_a\sin\omega t-p_b\cos\omega t\approx p_0-p_1(x_0=L/4)\cos\omega t \tag{36}$$

将(12)式、(16)式代入,得

$$p_b\approx p_1(x_0)=a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos(kx_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}ak\gamma p_0 \tag{37}$$

代入(35)式,得

$$w=\frac{\pi}{2\omega l}(\gamma-1)\beta(\tau-\tau_{\mathrm{cr}})\cdot ka^2 \tag{38}$$

一个周期内气体产生的总功

$$W_{\mathrm{tot}}=w\cdot Sl=\frac{\pi}{2\omega}(\gamma-1)\beta(\tau-\tau_{\mathrm{cr}})\cdot ka^2S \tag{39}$$

B.6 为求出在一个周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 内从 $x=x_0$ 截面左侧传输到右侧的热量 Q_{tot},设气体微团在x方向上的长度为Δx,如图3所示,则应有

$$Q_{\mathrm{tot}}=\int_0^T\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{u(x_0,t)}{\Delta x}\cdot\mathrm{d}t, \tag{40}$$

将(31)式、(1)式和(26)式代入，得

$$Q_{tot}=\frac{\pi}{2\omega}\cdot\beta\frac{a^2S}{l}(\tau-\tau_{cr}) \tag{41}$$

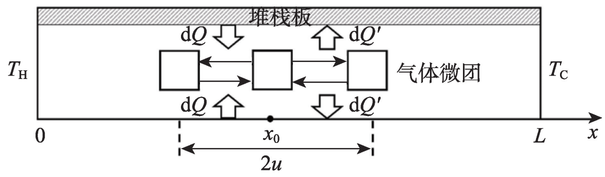

图3 驻波型声场中气体微团运动示意图

B.7 热声热机的效率定义为产生的声能W_{tot}与从高温热库吸取的热量Q_{tot}之比，即

$$\eta=\frac{W_{tot}}{Q_{tot}} \tag{42}$$

将(39)式、(41)式和(26)式代入，得

$$\eta=\frac{W_{tot}}{Q_{tot}}=(\gamma-1)kl=\frac{\tau_{cr}}{T_0}=\frac{\tau_{cr}}{\tau}\cdot\frac{\tau}{T_0} \tag{43}$$

由于$\tau<<T_0$，即堆栈板两端之间的温差τ(即高温和低温热库之间的温差)相比于温度T_0是很小的，所以卡诺热机效率

$$\eta_c=1-\frac{T_C}{T_H}=\frac{\tau}{T_0} \tag{44}$$

所以

$$\eta=\frac{\tau_{cr}}{\tau}\eta_c \tag{45}$$

B部分评述

本部分介绍了热至声功的核心部件堆栈板。堆栈板的右和左边缘保持温度差τ。堆栈板的左边缘位于$x_H=x_0-l/2$处，通过外部热库将温度维持在$T_H=T_0+\tau/2$，与此同时，位于$x_C=x_0+l/2$处的堆栈板右边缘，温度维持在$T_C=T_0-\tau/2$。堆栈板内允许有轻微的纵向热流以保持其左右两边缘间恒定的温度梯度。气体微团经历周期性的压缩和膨胀，微团的压力呈周期性波动，温度随压力改变而改变。气体微团一旦发生位移，它与板片之间的热平衡状况就破坏了，它们之间必发生换热的作用。尽管气体微团本身温度因压缩作用也升高了，但如果堆栈板的温度梯度较大，以致于气体微团离开平衡位置后接触的板片表面温度总是高于微团的温度，板片就会对气体微团加热。所以B1、B2部分给出了为了让该装置作为热机使用的临界温度差(高低温热库间温度差的最小值)的求法。

接下来的问题讨论了气体微团的做功和吸放热情况。由于气体微团和堆栈板之间的有限热流导致了气体微团的压强和体积的振动相位的差异，气体微团才能对外做功(图4)。所以题目将气体的体积和压强写成(30)式的形式，从而计算气体做功。

本题对堆栈板和气体在平衡位置附近的振动做了大量的近似，需要按照题目的近似要求一步一步进行计算。而在文献①中，有对热声热机效率的详细计算。

赛题背景：

热声学研究的是热扩散和声波动之间的相互作用。热声热机研究中的热声则是限定在一个较为狭窄的范围，即热与声功的直接转换。当系统满足一定的几何和热力学边界条件时热声效应显现出来。

一般的热声效应是当具有压缩性的流体工质在该系统中进行声振荡时与固体工质之间进行热力相互作用而发生的时均能量转换效应，即消耗热

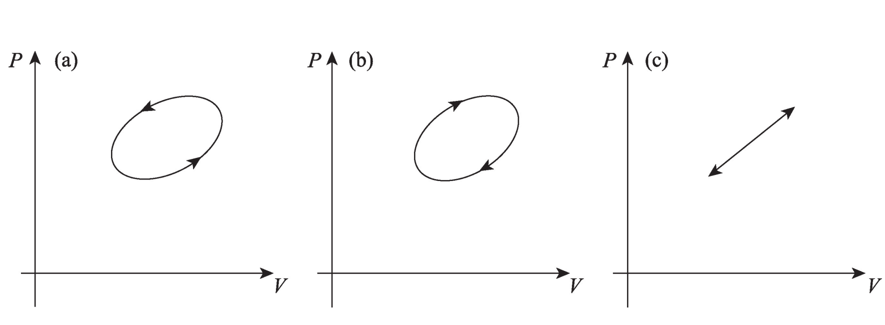

图4 (a) (b)气体压强和体积存在相位差；(c)气体压强和体积同相位，气体对外界不做功

能得到声功,或是消耗声功而产生定向热流。

从热声现象研究中逐渐发展起来的热声学揭示了热声效应的起源:声波在流体中纵向传播的同时伴随着振流体与固体之间横向交变的动量和热量的交换。这两个方向波动扩散的相互作用使得热声的效应得以产生和维持。两个方面缺一不可,否则只能是单一的热现象或是单一的声现象。热声效应的另一个意义是热和声之间的转化并不是单一方向的,这个效应既有热向声的转换功能,又有声向热的转换功能,而后一个转换不是简单意义上的热耗散,而是由消耗声能实现热能品质的改变和热量的迁移[②]。

热声现象:

在18世纪的中期,欧洲的吹玻璃工人首先观察到了热声效应,他们在吹玻璃时注意到熔化的玻璃球连接到长而窄的中空玻璃管时,管子的尖端有时会产生一个响亮的声音。这一现象在200多年前就已经引起人们的注意,但近几十年来,对热声现象的研究才取得了一定的进展。在这一领域有许多研究进展,包括理论模型、数值模拟、性能实验等。

1777年,Bryan Higgins等在实验室中通过在一个两端开口的垂直玻璃管内放置氢气的火焰产生了一种驻波声波,这就是所谓的“会唱歌的火焰”,如图5所示。

1949年,Kramers首次尝试研究热声现象,他的工作基于边界层近似理论。虽然他在将计算结果与实验数据进行比较时没有得到理想的结果,但他的研究鼓励了其他科研人员深入研究热声现象。随后,Taconis的研究表明,如果包含气柱的管子的温度沿管长变化,尤其是在温度不高的实验中,气柱可能会产生生自发振动。

1962年,Carter等人对Soundhauss管进行了较大的改进。他在管子内放置了一堆平行板即堆栈板,如图6所示。这使得工质气体的传热更有效。然后,为了在堆栈板冷热两端形成一个较大的温度梯度,

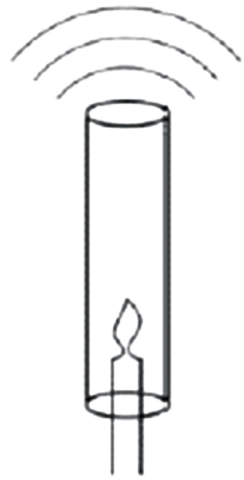

图5 Higgins的会唱歌的火焰

在堆栈板的两侧放置冷却器和加热器,以便与外部热源交换热量。因此,从热端到冷端的部分热量将以驻波声波的形式转换为功。这种功可以通过活塞来驱动飞轮,也可以用来运行热声热泵或制冷机[③]。

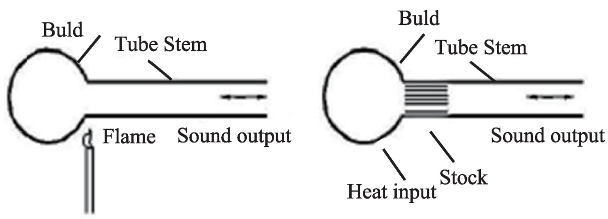

图6 Soundhauss-Carter管

参考文献

① Swift G W . Thermoacoustic engines[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1988.

② 李青. 热机的新发展--热声热机[J]. 世界科技研究与发展, 2000, 22(004):59-63.

③ 朱保宇. 驻波热声发动机理论和实验研究[D].