



微波炉的物理学

——2019国际物理奥林匹克竞赛理论 第二题参考解答

李 璠¹ 宋 峰²

(1. 西安市铁一中学 710054; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

A 部分: 磁控管的结构和操作

A.1 LC 电路的频率是

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1)$$

对于理想无限长通电螺线管内部磁感应强度 $B_{\text{理}}$ 满足环路定理

$$\oint \vec{B}_{\text{理}} \cdot d\vec{l} = B_{\text{理}} l = \mu_0 I$$

$$\therefore B_{\text{理}} = \frac{\mu_0 I}{l}$$

其中 I 为螺线管边界处边长为 l 的矩形环路中所包围的电流。

在本题中, 设沿腔体边界流动的总电流为 I , 等效螺线管长度 $l=h$, 则它产生的磁感应强度大小为

$$B = 0.6B_{\text{理}} = 0.6\mu_0 I/h$$

$$\therefore \text{总磁通量 } \Phi = BS = 0.6 \frac{\mu_0 I}{h} \times \pi R^2$$

$$\text{又 } \because \Phi = LI$$

\therefore 谐振器的电感为

$$L = \frac{0.6\pi\mu_0 R^2}{h} \quad (2)$$

将电容器近似为平板电容器, 其电容为

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 lh}{d} \quad (3)$$

将(2)和(3)式代入(1)式, 可得

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{0.6\pi R^2 \mu_0 \epsilon_0 lh}}$$

其中 $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, c 为真空光速。

$$\therefore f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{R} \sqrt{\frac{d}{0.6\pi l}} = \frac{1}{2\pi} \frac{3 \times 10^8}{7 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{1}{3.6\pi}} = 2.0 \times 10^9 \text{ Hz}$$

本小问涉及到简单的 LC 电路基本知识。

A.2 施加在电子上的合力为

$$\vec{F} = -e[-E_0 \hat{y} + \vec{u}(t) \times B_0 \hat{z}]$$

式中, 电子速度 $\vec{u}(t) = \vec{u}_D + \vec{u}'(t)$ 。

其中 \vec{u}_D 对应的洛伦兹力可以与电子所受的电场力相互抵消的速度, 即

$$q\vec{u}_D \times \vec{B} = -q\vec{E}$$

$$\text{已知 } \vec{B} = B_0 \hat{z}, \vec{E} = E_0 \hat{y}$$

$$\therefore \vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}, \text{ 即带电粒子在正交电磁场中的}$$

漂移速度。

而 $\vec{u}'(t)$ 所对应的洛伦兹力为

$$\vec{F} = -e\vec{u}'(t) \times B_0 \hat{z}$$

因此, 在以漂移速度 \vec{u}_D 运动的参考系中, 电子作匀速圆周运动, 速度 $u' = |\vec{u}'(t)|$, 半径 $r = mu'/eB_0$; 在实验室参考系中, 电子的运动为这种圆周运动与匀速漂移运动 \vec{u}_D 的叠加, 因此

1. 当 $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$, 可得 $u' = 4E_0/B_0$, $r = 4mE_0/eB_0^2$
2. 当 $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$, 可得 $u' = 2E_0/B_0$, $r = 2mE_0/eB_0^2$

再结合以 u' 作圆周运动的周期的独立性, 我们可以描绘出两种情况下的电子轨迹, 分别为图 1 中绿色的情况 1 和红色的情况 2 所示:

本小问考察了带电粒子在电磁场中的运动。

A.3 在以漂移速度 \vec{u}_D 运动的参考系中, 电子的运动可近似看作一个速率为 u' 的圆周运动。由 A.2, 可得

$$u_D + u' = v_{\max} \text{ 和 } u_D - u' = v_{\min}$$

因此,

$$u' = (v_{\max} - v_{\min})/2 < v_{\max}$$

在此参考系中, 电子圆周运动的半径是

$$r = mu'/eB_0 < mv_{\max}/eB_0$$

最大速度对应的动能为

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 800 \text{ eV}$$

由此可得

$$\begin{aligned} r &< \frac{m}{eB_0} \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2mK_{\max}}{e^2}} \\ &= \frac{1}{0.3\text{T}} \sqrt{\frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{kg} \times 800\text{V} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{C}}{(1.6 \times 10^{-19} \text{C})^2}} \\ &= 3.18 \times 10^{-4} \text{m} \approx 0.3 \text{mm} \end{aligned}$$

由于半径的最大值(0.3 mm)远小于阳极和阴极之间的距离(15 mm), 所以可以忽略电子运动的圆周运动分量, 将其近似为纯漂移运动。

本小问研究了带电粒子的圆周运动。

A.4 如前所述, 可以把电子运动近似看作纯漂移。在问题 A.2 中, 可知漂移速度 \vec{u}_D 的方向与矢量 $\vec{E} \times \vec{B}$ 的方向一致。我们来考虑漂移速度的径向分

量, 影响它的唯一因素是电场的角向分量。静电场没有角向分量, 因此径向漂移完全由交变电场的角向分量引起。

现在考查这个角向分量是顺时针的还是逆时针的。从电场线的方向可以很容易地看到(图 2), 在 A 点和 B 点, 电场的角向分量指向顺时针方向, 因此那里的电子向阴极漂移, 而对于 C 点、D 点和 E 点, 电场的角向分量指向逆时针方向, 那里的电子向阳极漂移。结果汇总于表 1。

A.5 在本问中, 先考虑漂移速度的角向分量, 它是由电场的径向分量引起的。由于所有点与阳极的距离相同, 所以所有电子处的静电场都相同。因此, 只有交变场的径向分量决定了这些电子位矢之间的夹角是增大还是减小: 如果交变场的径向分量指向内侧(朝向阴极), 则角向漂移速度将为正(逆时针), 反之亦然。因此, A、B 和 C 处的电子在角距离上彼此靠近, 而 D、E 和 F 处的电子则彼此远离。结果汇总于表 2。

上述两小问, 通过矢量特性进行判断方向。

A.6 根据上一问的结果, 在聚焦发生的区域有四根辐条, 如图 3 所示。电子的漂移使得辐条向逆时针旋转。交变电场的频率为 $f=2.45 \text{ GHz}$ 。

当交变磁场符号反转(半周期)时, 每根辐条移动到下一个空腔, 对应转过 $\pi/4$ 的角度。因此, 每根辐条的角速度为

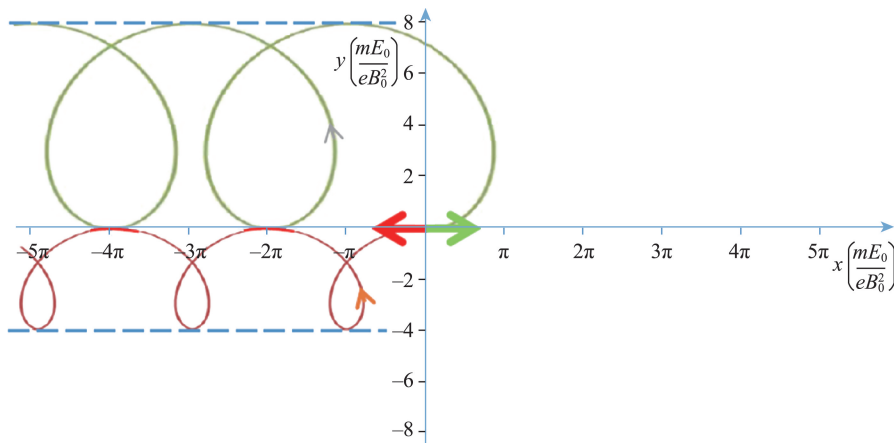


图 1

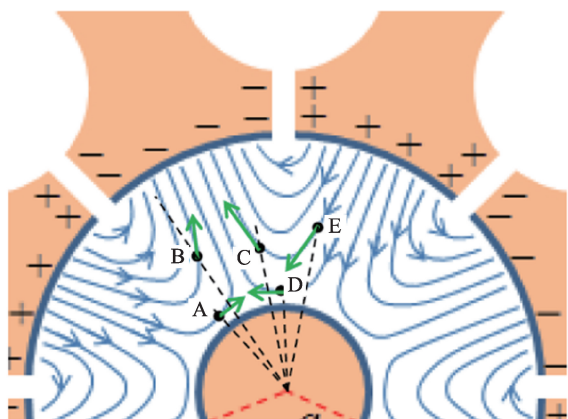


图2

表1

点	向阳极	向阴极	垂直半径
A		○	
B		○	
C	○		
D	○		
E	○		

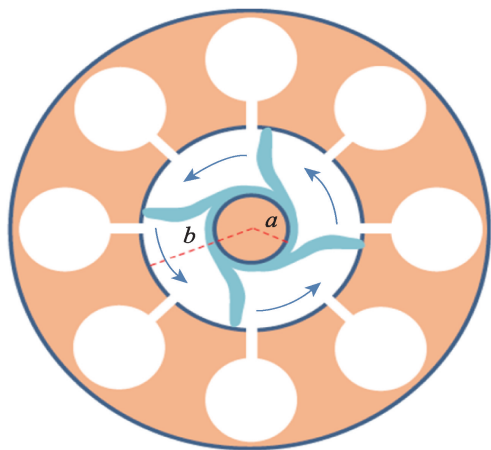


图3

表2

点	夹角减小	夹角增大	不确定
AB	○		
BC	○		
CA	○		
DE		○	
EF		○	
DF		○	

$$\omega = \frac{\pi}{4} \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} f = 3.85 \times 10^9 \text{ rad/s} \quad (4)$$

在交变磁场变化四个周期后,每根辐条围绕磁控管旋转一周。

A.7 在所给半径 $r = \frac{(b+a)}{2}$ 处的电场的大小是指静电场强度的大小,由题意可以近似等于电场沿阴极到阳极的平均静电场强度:

$$E = \frac{V_0}{b-a}, \text{ 其中 } V_0 \text{ 为磁控管静电场电压。}$$

由此产生的角向漂移速度的大小为

$$u_D = \frac{E}{B_0} = \frac{V_0}{B_0(b-a)}$$

若认为 $\frac{u_D}{r}$ 与上一问中得出的角速度(见(4)式)相等,则可以得到

$$V_0 = \frac{1}{4} \pi f B_0 (b^2 - a^2)$$

讨论:按照本题题目要求,我们的确可以得到上述近似结果,但题目要求的近似其实是存在矛盾的,实际上 $r = \frac{b+a}{2}$ 与 $E = \frac{V_0}{b-a}$ 并不具有对应关系。

因此,如果没有强制的近似要求,我们估算磁控管所需静电场电压时也可以采用以下两种方法:

(1) 先求出 $r_1 = \frac{b+a}{2}$ 处的电场 $E_1(V_{01})$,若 r_1 处的漂移速度与上问中得出的角速度相对应,即

$$u_{D1} = \frac{E_1(V_{01})}{B_0} = \omega r_1 \quad (5)$$

由此可以求出 V_{01} .

(2) 先求出等效平均静电场强度大小 $E_2 = \frac{V_{02}}{b-a}$ 所对应的半径 r_2 ,再将 r_2 处的漂移速度与上问中得出的角速度相对应,即

$$u_{D2} = \frac{E_2(V_{02})}{B_0} = \omega r_2 \quad (6)$$

由此可以求出 V_{02} 。

磁控管中的静电场可以看作是半径为 a 的圆柱形导体半径为 b 的同轴圆柱导体壳构成的电容器间的电场,设半径 r 处的静电场强度为 $E(r)$,由高斯

定理

$$\oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

其中 λ 为电容器电极沿轴线上的电荷线密度。

$$\therefore V_0 = \int_a^b E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

可得 $\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} V_0$, 代入(7)式得

$$E(r) = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{V_0}{r} \quad (8)$$

将方法(1)中的 $r_1 = \frac{b+a}{2}$ 代入(8)式和(5)式, 得

$$E_1 = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{V_{01}}{\frac{b+a}{2}} = B_0 \omega \frac{b-a}{2}$$

再由(4)式给出 $\omega = \frac{\pi}{2} f$

$$\text{可得 } V_{01} = \frac{\pi f B_0 (b-a)^2}{8 \ln \frac{b}{a}} \quad (9)$$

将方法(2)中的 $E_2 = \frac{V_{02}}{b-a}$ 代入(8)式

$$\text{则 } r_2 = \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}}$$

再由(6)式和(4)式可得

$$V_{02} = \frac{\pi f B_0 (b-a)^2}{2 \ln \frac{b}{a}} \quad (10)$$

B 部分: 微波辐射与水分子的相互作用

B.1 t 时刻与电场夹角为 θ 的电偶极子受到电场力的力矩为

$$\tau(t) = -qd \sin \theta(t) E(t) = -p_0 \sin \theta(t) E(t)$$

其中“ $-$ ”表示 θ 为正时电场力的力矩使 θ 减小。

则电场力对第 i 个偶极子的瞬时功率为

$$H_i(t) = \tau(t) \dot{\theta}(t) = -p_0 E(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t)$$

$$= E(t) \frac{d}{dt} [p_0 \cos \theta(t)] = E(t) \frac{dp_{xi}(t)}{dt}$$

其中 $p_{xi}(t) = p_0 \cos \theta(t)$ 是第 i 个偶极子的电偶极矩在电场方向(\hat{x})上的分量。

B.2 因为平均偶极矩密度(单位体积内每个分子偶极矩的总和, 即极化强度矢量 $\vec{P}(t)$)方向与电场强度方向平行, 所以吸收功率密度为(尖括号 $\langle \dots \rangle$ 表示随时间的平均值)

$$\langle H(t) \rangle = \left\langle \frac{\sum H_i(t)}{\Delta V} \right\rangle$$

$$= \left\langle E(t) \frac{d \sum p_{xi}(t)}{\Delta V} \right\rangle$$

$$= \left\langle E_0 \sin(\omega_f t) \frac{dP_x}{dt} \right\rangle$$

已知极化强度的 x 方向分量

$$P_x(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega_f t - \delta)$$

可得

$$\langle H(t) \rangle = \left\langle E_0 \sin(\omega_f t) \frac{d}{dt} (\beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega_f t - \delta)) \right\rangle$$

$$= E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin(\omega_f t) \cos(\omega_f t - \delta) \rangle$$

$$= 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin \delta + \sin(2\omega_f t - \delta) \rangle$$

又由

$$\langle \sin(\omega_f t - \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(\omega_f t - \delta) dt = 0$$

其中

$$\omega_f = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

所以

$$\langle H(t) \rangle = 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \sin \delta$$

$$= \pi f E_0^2 \beta \epsilon_0 \sin \delta$$

上述两小问是利用公式计算瞬时功率和平均功率。

B.3 因为电场和磁场的平均能量密度相等, 所以穿透深度 z 处的电磁场能量密度是电场能密度的两倍, 即

$$w = 2 \times \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \langle E^2(z, t) \rangle$$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) \langle \sin^2(\omega t) \rangle$$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) / 2$$

因此, 深度 z 处的能流密度对时间的平均值为:

$$I(z) = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2(z) \times \frac{c}{n} = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_r} \varepsilon_0 c E_0^2(z) \quad (11)$$

$$\therefore E_0^2(z) = \frac{2I(z)}{\sqrt{\varepsilon_r} \varepsilon_0 c}$$

式中, c 是真空中光速, $\frac{c}{n}$ 为介质中的光速, $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ 为折射率。

我们在上一问中算出了吸收功率 $\langle H(t) \rangle$, 结合连续性方程 $\langle H(t) \rangle S dz = -S dI(z)$, S 为横截面积, 由此可得

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2(z) \sin \delta = -\frac{\beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\varepsilon_r}} I(z)$$

所以

$$I(z) = I(0) \exp\left(-\frac{\beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\varepsilon_r}} z\right) \quad (12)$$

可见 I 随 z 的增大而减少。

B.4 已知 $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n \frac{\omega}{c} z \tan \delta} \sin\left(n \frac{\omega}{c} z - \omega t\right)$

所以 $\langle E^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 e^{-n \frac{\omega}{c} z \tan \delta}$

再由(11)式, 对于给定电场的能流为

$$I(z) = \sqrt{\varepsilon_r} \varepsilon_0 c \langle E^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_r} \varepsilon_0 c E_0^2 e^{-z \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \tan \delta}$$

令上述表达式中的指数的自变量与上一问的结果相等, 即

$$-\frac{\beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\varepsilon_r}} z = -z \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \tan \delta \quad (13)$$

使用给定的近似值

$$\tan \delta \approx \sin \delta$$

计算得到:

$$\beta = \varepsilon_r$$

B.5

1. 利用(12)式和(13)式可得

$$I(z) = I(0) \exp\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_r} \omega \tan \delta}{c} z\right)$$

在 $z_{1/2}$ 处, 单位面积的辐射功率降低到其在 $z=0$ 处大小的一半, 即

$$I(z_{1/2}) = I(0) \exp\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_r} \omega \tan \delta}{c} z_{1/2}\right) = \frac{1}{2} I(0)$$

$$z_{1/2} = \frac{c \ln 2}{\omega \sqrt{\varepsilon_r} \tan \delta}$$

已知 $\tan \delta = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}$, 则

$$z_{1/2} = \frac{c \sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_i} \quad (14)$$

从所给的图中可以看出, 在给定的频率下, $\varepsilon_r = 78$, $\varepsilon_i = 10$, 因此, $z_{1/2} \approx 12 \text{ mm}$ 。

由(14)式可以得出, 穿透深度与 $\sqrt{\varepsilon_r} / \varepsilon_i$ 成正比。从所给的图中我们也可以得出此结论。

2. 在给定的频率下, 加热纯水(实线)时, 与对应的 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 相比, ε_i 减少得更为显著。因此, 在纯水中穿透深度随着温度的升高而增大, 这使得微波辐射可以更深地穿入水中, 并加热水的内部区域。

3. 相反, 对于汤(稀盐溶液, 虚线)而言, 在给定频率下, 随着温度的升高, ε_i 增大, 而 ε_r 减小。因此, 吸收率随温度升高而增大, 穿透深度随温度升高而减小, 只有较少的微波辐射可以到达汤的内部区域。总结于表3。

表3

材料	$z_{1/2}$ 随温度升高而增大	$z_{1/2}$ 随温度升高而减小	$z_{1/2}$ 保持不变
水	○		
汤		○	

上面几小问计算微波的辐射强度及具体的应用。利用公式进行计算即可, 计算时要小心些。