零长度弹簧和细线圈
——2019国际物理奥林匹克竞赛理论第一题解答

王立超[1] 宋 峰[2]

(1. 浙江省东阳中学 322100;2. 南开大学物理科学学院 300071)

第一部分 静力学

1.1 在外力F作用下,零长度弹簧(ZLS)的长度从原长L_0伸长到L。一根未拉伸的ZLS中,有一小段,其长度为Δl。然后给弹簧一个作用力F,此时这一小段的长度为Δy。

弹簧上的每一部分受力相同且性质一致。由此可知弹簧伸长量Δy与原弹簧的Δl的关系为

$$\Delta y=\frac{L}{L_0}\Delta l \tag{1}$$

$F\leqslant kL_0$时弹簧保持原长,故可得:

$$\Delta y=\Delta l,\ F\leqslant kL_0 \tag{2}$$

由于弹簧各部分性质相同,则对于Δl这一部分的弹簧系数可表示为

$$k'=\frac{kL_0}{\Delta l} \tag{3}$$

(同理若取微分dl,弹簧系数可表示为$k'=\frac{kL_0}{dl}$)

$F>kL_0$时,弹簧拉伸,

$$\Delta y=\frac{F}{k'}=\frac{F\Delta l}{kL_0} \tag{4}$$

1.2 从(1.1)中可知,Δl这一段拉伸至x长度处,$F(x)=\frac{kL_0}{\Delta l}x$,则拉伸到$\Delta y$外力所做的功为

$$\Delta W=\int_{\Delta l}^{\Delta y}F(x)\mathrm{d}x=\int_{\Delta l}^{\Delta y}\frac{kL_0}{\Delta l}x\mathrm{d}x=\frac{kL_0}{2\Delta l}(\Delta y^2-\Delta l^2) \tag{5}$$

1.3 任取一点,该点到底部的重力与该点的张力平衡,则越靠近顶部张力越大。设底部长度l_0的部分保持原长,则有

$$\frac{l_0}{L_0}Mg=kL_0\Rightarrow l_0=\frac{kL_0^2}{Mg}=\alpha L_0 \tag{6}$$

当$l>l_0$时,取l到$l+\mathrm{d}l$的弹簧微元$\mathrm{d}l$,l处到底部重力为$\frac{l}{L_0}Mg$,微元重力为,在张力作用下微元$\mathrm{d}l$被拉伸成$\mathrm{d}y$,则$\mathrm{d}y=\frac{F}{k'}=\frac{Mg}{kL_0^2}l\mathrm{d}l=\frac{l}{l_0}\mathrm{d}l$,故弹簧在自重的拉伸下总长度为

$$H=\alpha L_0+\int_{\alpha L_0}^{L_0}\mathrm{d}y=\alpha L_0++\int_{\alpha L_0}^{L_0}\frac{l}{\alpha L_0}\mathrm{d}l=\frac{L_0}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right) \tag{7}$$

第一部分评述

这一部分,主体考察零长度弹簧的静力学问题。中学生通常遇到的弹簧类问题都基于理想化模型,一般忽略弹簧的本身质量,且在受力情况下会发生形变,形变量和受力满足胡克定律。而此类零长度弹簧,由原题中图像的函数关系可知,弹簧有固有长度,且受力较小时保持原长不变,故原长弹簧的一小段Δl在受力情况下,根据力的大小情况应分类讨论,当力较小时长度保持不变;当力较大时,可将整体分解为微小的段(长度为Δl),总形变量为每一小段形变量的和,每一小段Δl的受力特征与整体一致,则对一小段dl的弹簧系数可以处理为$k'=\frac{kL_0}{\Delta l}$。

对此小段Δl外力做功进行分析,从有形变开

始，随外力线性变化，做简单积分处理就可得拉伸到 Δy 后所需做的功，这也为第三部分能量相关问题做了铺垫。

第三小题，在自身重力作用下求弹簧的最终长度。由第一小题对弹簧形变的讨论中可知，弹簧竖直悬挂时下端一部分因受力较小不发生形变，任意选取上端的一小段 Δl，越靠上受力越大，形变量也越大，而整体的形变量为每一小段形变量之和。此题解题时要合理设置物理量，对临界情况分析要仔细，将题中所给条件和求解思路弄清晰即可。

第二部分　动力学

2.1 从(1.3)结论中我们可知 $H(l)=\dfrac{l^2}{2l_0}+\dfrac{l_0}{2}$，当弹簧顶端释放后弹簧系统只受到重力的作用，则弹簧系统质心做自由落体运动。我们只要算出质心下落的距离即可计算运动时间。底部未拉伸部分的质量为 αM，$\mathrm{d}l$ 的质量为 $\dfrac{\mathrm{d}l}{L_0}M$，根据质心公式，初始状态整体质心位置到底部的距离为

$$
\begin{aligned}
H_{cm}&=\frac{1}{M}\left[\frac{l_0}{2}\alpha M+\int_{l_0}^{L_0}H(l)\mathrm{d}m\right]=\frac{\alpha^2L_0}{2}\\
&+\frac{1}{L_0}\left[\frac{(1-\alpha^3)}{6\alpha}L_0^2+\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)L_0\right]\\
&=\frac{1-\alpha^3+3\alpha^2}{6\alpha}L_0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

弹簧收缩到原长后，质心到底部的距离为 $\dfrac{L_0}{2}$，根据 $\dfrac{1}{2}gt_c^2=\Delta H_{cm}$，得到：

$$\frac{1}{2}gt_c^2=H_{cm}-\frac{1}{2}L_0=\frac{L_0}{6\alpha}(1-\alpha)^3 \tag{9}$$

可解得：$t_c=\sqrt{\dfrac{L_0}{3g\alpha}(1-\alpha)^3}$

代入题中参数，可得 $t_c=0.245\ \mathrm{s}$。

2.2 弹簧自由释放后分为两部分，运动部分和静止部分。其中运动部分质心的速度处理和(2.1)中相似，可等效为整体重力施加在运动部分I上，运动部分的质量为 $m_l=\dfrac{L_0-l}{L_0}M$，

$$a_l(l)_{cm}=\frac{Mg}{m_l}=\frac{L_0}{L_0-l}g \tag{10}$$

当 $l>l_0$ 时，弹簧一直处于收缩状态直至恢复原长，设 $H(l)$ 处为临界点，之上为运动部分，之下为静止部分，取此点为基点，则运动部分此时质心位置为 $\dfrac{L_0-l}{2}$，初始状态时的质心坐标为到底部距离减去基点到底部的距离，表示为，

$$H_{cm}(l\to L_0)=\frac{L_0}{(L_0-l)M}\left[\int_l^{L_0}H(l)\mathrm{d}m\right]-H(l) \tag{11}$$

而运动部分质心下落的距离为

$$
\begin{aligned}
\Delta H_{cm}(l\to L_0)&=H_{cm}(l\to L_0)-\frac{L_0-l}{2}\\
&=\frac{(L_0-l)(L_0+2l-3\alpha L_0)}{6\alpha L_0}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

结合(10)式，运动部分质心的速度可表示为

$$v_l(l)=\sqrt{2a_l(l)_{cm}\Delta H_{cm}(l\to L_0)}=\sqrt{\frac{2g}{3\alpha}l+\frac{1-3\alpha}{3\alpha}gL_0} \tag{13}$$

所以，$A=\dfrac{2g}{3\alpha}$；$B=\dfrac{1-3\alpha}{3\alpha}gL_0$。

2.3 由(13)式的函数关系可知，随着弹簧收缩，速度减小，直至与底部保持原长部分碰撞后速度再次减小，根据动量守恒可得最小速度为

$$v_{\min}=\frac{m(l_0)v_l(l_0)}{M}=(1-\alpha)\sqrt{A\alpha L_0+B} \tag{14}$$

(14)式同样也可用 gt_c 进行计算，结果是相同的，通过此结果我们可知，在弹簧收缩恢复至原长前，运动部分质心的速度始终减小，而初始一瞬间速度有突变过程，突变的时间远小于 t_c(初始状态的速度切勿视为0处理)。

第二部分评述

原题中，弹簧上端释放后，已给出弹簧运动的频闪照片，通过照片我们可以定性判断弹簧的运动情况，下端受力状态没有发生变化，则保持静止；而上端做加速运动，弹簧由上至下恢复至原长。若对每一小段做微元分析，则每次运动状态和动力学方程都较为复杂，最简单的处理就是采用整体法，那么，弹簧整体质心只受到重力作用，质心的运动状态即为自由落体。因已知重力加速度，则求出初末

状态的质心坐标差之后,再通过运动学方程可得到时间,质心坐标表述时利用(1.3)的结论。

第二小题的主体处理思想与第一小题一致,只是把弹簧分为运动部分和静止部分,运动部分可以等效为整体重力施加在运动部分的外力,据此可得运动部分质心加速度,利用运动学方程即可得到运动部分的质心速度大小。

该部分运算量稍大,利用整体法进行分析,在质心坐标处理时需要耐心设置合适的物理量进行表示。

第三部分　能量学

3.1　整个过程弹簧质心自由落体,而空气阻力不计,弹簧收缩恢复至原长后为完全非弹性碰撞,则过程中机械能的损失即为弹簧伸长状态下的弹性势能,或等于弹簧弹力使得弹簧恢复至原长所做的功。同样取 $\mathrm{d}l$ 微元,则 $\mathrm{d}y=\frac{F}{k'}=\frac{Mg}{kL_0^2}l\mathrm{d}l=\frac{l}{l_0}\mathrm{d}l$ 又可得 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)^2=\left(\frac{l}{l_0}\right)^2$,从结合(1.2)中结论可知:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=\frac{1}{2}k'(\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}l^2)=\frac{1}{2}\frac{kL_0}{\mathrm{d}l^2}(\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}l^2)\mathrm{d}l\\&=\frac{1}{2}kL_0\left(\frac{l^2}{\alpha L_0}-1\right)\mathrm{d}l\end{aligned}\tag{15}$$

则整个下落过程产生的热量可积分得:

$$Q=\int_{\alpha L_0}^{L_0}\frac{1}{2}kL_0\left(\frac{l^2}{\alpha L_0}-1\right)\mathrm{d}l=\frac{MgL_0}{6\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)\tag{16}$$

第三部分评述

该部分在完成一二部分的基础上处理较为简单,第二部分问题中,运动部分弹簧与原静止部分弹簧的碰撞,为完全非弹性碰撞,会有能量损失。利用(1.2)结论可知,弹簧在自身重力作用下的每一小段弹性势能大,积分得到的弹性势能即为产生的热量。

科苑快讯

新种类水熊虫利用荧光“盾牌”抵御致命紫外线辐射

缓步动物是一种被称为水熊虫的小型水生生物,它们能耐受极热、辐射环境,即使是在能够杀死大多数动物的外层空间的真空条件下,也能生存。现在,科学家发现了一种新的缓步动物,可以忍受致命的紫外线,紫外线经常被用于清除难以杀死的病毒和细菌。

这一发现纯属偶然:印度科学院(Indian Institute of Science)的研究人员在校园里搜寻水熊虫,然后将他们暴露在极端环境中。碰巧实验室里有一个杀菌紫外线灯,他们用它来照射这些样本。每平方米1000焦耳的剂量,可以在5分钟后杀死细菌和蛔虫,15分钟照射对水熊虫也是致命的,然而这个样本中的水熊虫大多数却在24小时后才死亡。当他们以同样剂量照射一种奇怪的红棕色水熊虫时,它们竟都活了下来。更重要的是,当研究人员将剂量增加4倍时,大约60%的红棕色水熊虫存活时间都超过了30天。

研究人员意识到他们发现了一种新的缓步动物,属于*Paramacrobiotu*属,是在印度班加罗尔混凝土墙上的苔藓中发现的。为了弄清它们是如何存活下来的,科学家用倒置的荧光显微镜对其进行观察。令人惊讶的是,在紫外光的照射下,红棕色的水熊虫变成了蓝色。研究小组在《生物学快报》(*Biology Letters*)期刊上报告,可能是位于水熊虫皮肤下的荧光色素将紫外光转化成无害的蓝光。相比之下,色素较少的*Paramacrobiotus*属在接触紫外线约20天后死亡。

接下来,研究人员提取了这些荧光色素,并用它们像盾牌一样包裹*H. exemplaris*和秀丽隐杆线虫。使用临时盾牌的动物的存活率,几乎是不使用盾牌的两倍。科学家说,在印度南部炎热的夏季,这些水熊虫很可能进化出了荧光,作为一种耐受高剂量紫外线的手段。

(高凌云编译自2020年10月13日www.sciencemag.org)