翻转陀螺的动力学方程及其守恒量

陈　曦　胡继超　译

（中国人民大学附属中学　100080）

引言

在理论力学的教学中，老师通常以陀螺为例介绍刚体运动的一些特殊性质，例如进动、章动、网球拍效应等。在普通物理实验中，老师有时也会使用一种称为翻转陀螺的小玩具来向同学们展示陀螺运动的奇异行为。在重力和摩擦力的作用下，转动的翻转陀螺会整个翻转180度。虽然翻转陀螺是一个不可积系统，但我们仍然能利用运动方程定性讨论其运动情况。

2019年亚洲物理奥林匹克竞赛的第三题以习题形式介绍了推导翻转陀螺运动方程的方法，并给出了陀螺能量和守恒量的表达式。我们将题目以正文的形式翻译如下，供老师和同学们讨论：

正文

翻转陀螺是一种旋转起来后会自动翻转的特殊陀螺。将一个半径为R的球截去一部分，再加上一个陀螺柄就能模拟一个翻转陀螺。它对于过陀螺柄的轴线有旋转对称性。这条轴和竖直方向的夹角为θ。如图1(a)所示，在沿轴线的方向上，翻转陀螺的质心C相对球心O有大小为αR的偏移。翻转陀螺静止在一个表面上的A点。假设该表面是平面，并称之为地平面。给定几何约束的条件下，如果翻转陀螺开始迅速旋转，它会开始倾斜，陀螺柄的指向会逐渐向下偏移。一段时间后陀螺柄的顶端朝下和地面接触，陀螺绕着柄的顶端旋转，直到最终停止。

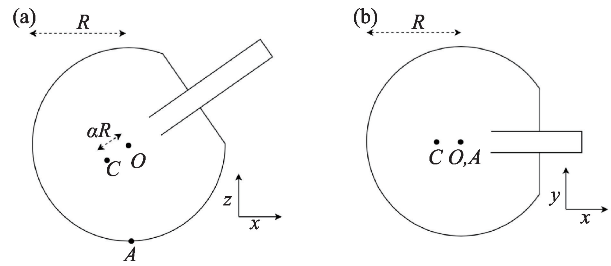

图1　翻转陀螺的侧视图(a)和俯视图(b)

以xyz标记一个旋转坐标系，该坐标系的$\hat{z}$轴静止且指向正上方；陀螺的对称轴在坐标系的xz平面内。图1分别是旋转陀螺侧视图和俯视图。如图1(b)所示，俯视图中陀螺的对称轴和x轴对齐。

图2展示了陀螺开始旋转后几个不同阶段的运动情况

(a) 阶段一：刚开始旋转后的时刻，此时$\theta \sim 0$

(b) 阶段二：一段时间后，陀螺倾斜至$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

(c) 阶段三：柄第一次接触地面时$\theta>\frac{\pi}{2}$

(d) 阶段四：翻转后，陀螺绕柄的顶端旋转时$\theta \sim \pi$

(e) 阶段五：最终状态，陀螺静止在柄的顶端时$\theta=\pi$

以XYZ标记惯性坐标系，陀螺在XY平面上转动。绕Z轴旋转ϕ角，XYZ坐标系可以变换到上面定义的xyz坐标系。从XYZ坐标系到xyz坐标系的变换如图3(a)所示，其中$\hat{z}=\hat{Z}$。

三维空间中的任意转动都可以用三个欧拉角(θ,ϕ,ψ)描述。我们可以通过这些欧拉角来描述惯

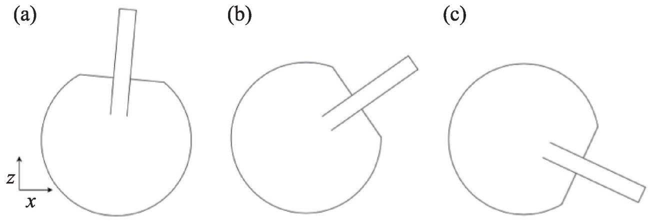

图2　阶段一到阶段五，翻转陀螺的运动状态在 xz 平面内的示意图

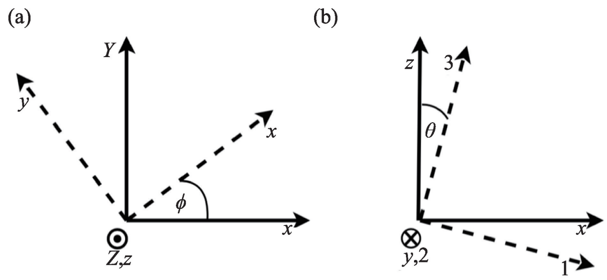

图3　不同坐标系之间的变换：(a)从 XYZ 系到 xyz 系的变换，(b)从 xyz 系到123系的变换

性系 XYZ、中间坐标系 xyz 和陀螺坐标系123之间的变换。

我们描述陀螺的运动时，角 θ 和 ϕ 分别是标准球极坐标系中的天顶角和方位角。在 XYZ 坐标系中这些角的定义如下：θ 角是陀螺对称轴和竖直 Z 轴间的夹角，描述了陀螺在竖直方向的偏斜程度；ϕ 角定义为 XZ 平面和平面 OAC 的夹角，它描述了陀螺绕 Z 轴转动的角位置(也即陀螺对称轴的竖直投影)。第三个欧拉角 ψ 描述陀螺绕其对称轴的转动，也即陀螺的自旋。对应的角速度为 $\dot{\psi}$ 。

定义一个固定在旋转陀螺上新旋转坐标系123。将 xyz 坐标系绕 y 轴旋转 θ 角就可以得到123坐标系：z 轴向下倾斜 θ 角后和陀螺的对称轴 $\hat{3}$ 重合。xyz 坐标系和123坐标系之间的变换关系如图3(b)所示。其中 $\hat{2}=\hat{y}$ 。

提示：一个在惯性系 K 中以角速度 ω 转动的坐标系 $\tilde{K}$ ，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 K 和 $\tilde{K}$ 系中对时间的导数之间存在以下关系：

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_K=\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_{\tilde{K}}+\omega\times A$$

翻转陀螺的运动非常复杂，涉及三个欧拉角随时间的演化、陀螺的平动速度(或者说位置)以及陀螺对称轴的运动。所有这些参数都相互耦合。为了求解翻转陀螺的运动，我们必须运用包括牛顿运动定律在内的标准工具来列出一组运动方程，然后通过电脑编程数值求解这些方程。在这个题目里，你需要进行上述求解过程的第一步，研究翻转陀螺的物理过程并建立运动方程。

翻转陀螺运动的平面和陀螺之间的摩擦力驱动陀螺的运动。假设陀螺和地面的接触点始终为 A 点，直到陀螺柄接触地面。陀螺在 A 处相对于地面的速度为 v_A。陀螺和地面间的滑动摩擦系数为 μ_k ，滑动摩擦力大小为 $\left|\boldsymbol{F}_f\right|=\mu_k N$ ，其中 $\boldsymbol{F}_f=F_{f,x}\hat{\boldsymbol{x}}+F_{f,y}\hat{\boldsymbol{y}}$ 是摩擦力，N 是支持力的大小。假设陀螺一开始只自转，即没有对陀螺施加导致其平动的冲击力。

陀螺的质量记为 m。它的转动惯量如下：绕对称轴的转动惯量为 I_3，垂直于对称轴且相互垂直的另外两个主轴的转动惯量为 $I_1=I_2$。陀螺质心的位置矢量标记为 $\boldsymbol{s}$，从质心指向接触点的矢量标记为 $\boldsymbol{a}=\overline{CA}$ 。

除非特别说明，你需要在 xyz 坐标系给出答案以获得满分。所有的力矩和角动量都是以质心 C 为参考点计算，除非特别说明。你的表达式里可以包含 N。除了A.8部分，你只需要研究 $\theta<\frac{\pi}{2}$ 时陀螺的运动，此时柄并未接触地面。

A.1　找到所有作用在翻转陀螺上的外力 $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ 。画出陀螺的受力分析图，并将其投影到 xz 平面和 xy 平面上。在 xy 平面上的投影图中标记出 v_A 的方向。　1分

A.2　以质心为参考点，计算翻转陀螺所受的合外力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}$ 。　0.8分

A.3　给定接触条件 $(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{a})\cdot\hat{z}=0$ ，证明A点的速度没有 z 方向的分量，即能把速度写为：$v_A=v_x\hat{\boldsymbol{x}}+v_y\hat{\boldsymbol{y}}$ 。　0.4分

A.4	利用图3(如果有帮助的话),在欧拉角对时间导数 $\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\phi}=\frac{d\phi}{dt}$, $\dot{\psi}=\frac{d\psi}{dt}$ 的基础上,以质心 C 为参考点写出旋转陀螺的总角速度 ω。你需要写出 xyz 和123坐标系中的表达式。	0.8分

A.5	在欧拉角对时间导数和平动速度 v_x , v_y 的基础上,写出旋转的翻转陀螺的能量的表达式。如果只写 $\dot{s}=\frac{ds}{dt}$,你将不能得到满分。	0.8分

A.6	求出角动量的时间变化率在 z 轴上的分量	0.8分

A.7	哪些力做的功和重力做的功相反?求出陀螺能量瞬时变化率的表达式,你的表达式中可以包含 v_A 。对应A.5中表达式中的各个项,确定哪些力和力矩的分量导致这些项的变化。	0.8分

A.8	陀螺的运动状态会从阶段一演化至阶段五,如图2所示。对这一演化过程,定性画出以下能量随时间变化的关系:总能量 E_T、重力势能 U_G、平动动能 K_T 和转动动能 K_R。不要求图中有数字标度。	0.8分

A.9	证明角动量 L 和角速度 ω 在垂直于 $\hat{3}$ 轴方向上的分量成正比,即: $L\times\hat{3}=k\left(\omega\times\hat{3}\right)$ 求出比例常数 k	0.8分

将A.1、A.2的答案和后面的结果结合,可以推导出支持力的大小N和运动方程组。这些方程给出了欧拉角,A 点速度的分量 v_x 、v_y ,对称轴 $\hat{3}$ 方向的单位矢量,以及这些物理量对时间的导数之间的关系。这个系统不可积,但是可以数值求解。

运动的积分是一个保持为常数的量,它可以减少系统的维度(即需要解析或者数值求解的方程的数量)。典型的运动积,例如能量、动量和角动量,对封闭系统是守恒的,并且可以极大简化问题。

A.10	你可能已经发现,由于耗散力和外力矩,无论角动量和能量都不守恒。但是存在一个称为Jellett积分的物理量 λ ,它是角动量的某个守恒的分量,即存在一个矢量 v 使得 $\lambda=L\cdot v$ 为一个常数。 利用你对翻转陀螺的理解和目前为止得到的结果,给出矢量 v 的表达式。证明 λ 对时间的导数是零。	0.8分

* * * * * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答同时发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。

科苑快讯

科学家为了寻找抗体和药物把新冠病毒棘突蛋白谱成音乐

你可能看过几十张这种新冠病毒的图片,数以十万计的人因此丧生。现在,科学家们找到了一种能让你听到它的办法,通过把它著名的棘突蛋白(spike protein)结构翻译成音乐。

你听到的声音——钟鸣声、拨弦声、欢快的笛声——都代表了病毒表面棘突蛋白的不同方面,这些棘突蛋白有助于病毒附着在毫无戒心的细胞上。就像所有蛋白质一样,这些棘突蛋白也由氨基酸组成。使用一种称为超声处理的新技术,麻省理工学院的科学家给每个氨基酸都分配了音阶中的一个独特音符,将整个蛋白质转化为一个初步的乐谱。

但在现实生活中,这些氨基酸往往会卷曲成螺旋状或伸展成片状。研究人员通过改变音符的持续时间和音量,来捕捉这些特征。分子因热产生的振动,也会发出自己的声音。

为什么要把病毒谱成音乐呢?这种新格式可以帮助科学家发现能够结合抗体和药物的蛋白质位点——只需要搜索与这些位点相对应的特定音乐序列即可。研究人员说,这种方法比传统蛋白质研究方法(如分子建模)更快、更直观。他们补充道,通过将这种棘突蛋白的音乐序列与大量其他声化蛋白相比较,有朝一日可能会找到一种与棘突蛋白结合的蛋白质,防止病毒感染细胞。

至于乐器,它们完全是研究人员的选择。在疫情爆发的情况下,日本筝(koto)演奏主要音符——舒缓的声音会带来一些安慰效果。

(高凌云编译自2020年4月3日www.sciencemag.org)