

# 2019年亚洲物理奥林匹克 竞赛理论第一题解答

苏俊<sup>1</sup> 宋峰<sup>2</sup>

(1. 江苏省海安高级中学 226600; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

## 第一部分：同轴电缆的集总元件模型

### 问题 1.1

真空中的光速为  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $c_0$  为真空中的光速。介质中的光速为：

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (1)$$

### 问题 1.2

以同轴电缆为中心, 对于半径为  $r$  的圆柱面, 铜芯与铜壳层之间, 即  $a < r < b$  时, 利用高斯定理, 有:

$\Delta x 2\pi r E(r) = \frac{\Delta q}{\epsilon_r \epsilon_0}$ , 计算得到:

$$E(r) = \frac{\Delta q}{\Delta x 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r} \quad (2)$$

### 问题 1.3

长度为  $\Delta x$  的电缆的电容为

$$C_x \Delta x = \frac{\Delta q}{\varphi} \quad (3)$$

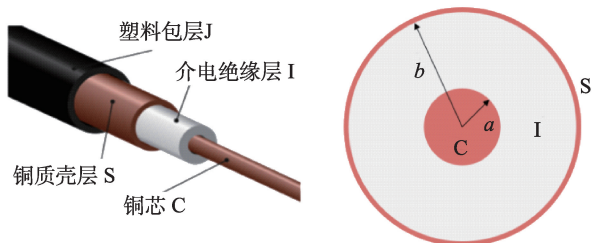


图1 同轴电缆线示意图

C:铜芯, I:介电绝缘层, S:金属外壳, J:塑料包层

$\varphi$  为铜芯电势, 设铜制壳层接地, 电势为 0, 两者电势差为:

$$0 - \varphi = -\int_a^b E(r) dr,$$

$$\text{则} \quad \varphi = \frac{\Delta q}{\Delta x} \frac{1}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (4)$$

$$\text{解得} \quad C_x = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (5)$$

### 问题 1.4

通过导线同一平面的磁通量等于电感与电流的乘积:

$$\Delta x \int_a^b B(r) dr = L_x \Delta x I \quad (6)$$

由毕奥-萨伐尔定律  $B(r) = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r}$ , 得到:

$$L_x = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (7)$$

### 问题 1.5

若电缆长度增加  $\delta x$  不改变电缆的阻抗, 则可以写出:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0 + j\omega \delta L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega \delta C}} = \frac{1}{Z_0} \quad (8)$$

$$Z_0^2 + j\omega \delta L Z_0 - \delta L / \delta C = 0 \quad (9)$$

这里  $j^2 = -1$ ,  $\delta L / \delta C = L_x / C_x$ , 当  $\delta x \rightarrow 0$ ,  $\delta L \rightarrow 0$ , 因此:

$$Z_0 = \sqrt{L_x / C_x} \quad (10)$$

$$Z_0 = \sqrt{L_x / C_x} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \ln(b/a) \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \times 59.96 \Omega \quad (11)$$

当  $Z_0=50 \Omega, \varepsilon_r=4.0, \mu_r=1.0$ , 可以得出  $b=5.30 a$ 。

第一部分, 涉及了介质中的光速、电场、电势、电容、磁场、磁通量、电感、阻抗等基本概念, 用到了高斯定理、毕奥-萨伐尔定律、以及上述一些物理量的定义式。问题 1.5 用到了极限的概念, 有简单的计算。

## 第二部分: 通过接地平面回流的传输电缆

### 问题 2.1

导电平面可以用位于平面另一侧通以反向电流的像来代替(镜像法), 像与导线相距为  $2d$ 。实际磁场为导线与像所产生的磁场的叠加, 由导线与平面间的磁通量可以给出:

$$L_x \Delta x I = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} I \int_a^b \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2d-r} \right) dr \Delta x \quad (12)$$

$$L_x = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{2d}{a} - 1 \right) \approx \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{2d}{a} \quad (13)$$

导线与高导电平面的电势差为:

$$\varphi = \frac{\Delta q}{\Delta x} \frac{1}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \int_a^b \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2d-r} \right) dr = \frac{\Delta q}{\Delta x} \frac{\ln(2d/a)}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \quad (14)$$

$$C_x = \frac{\Delta q}{\Delta x} \frac{1}{\varphi} \approx \frac{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0}{\ln(2d/a)} \quad (15)$$

由  $Z_0 = \sqrt{L_x/C_x}$ , 可得导线与平面系统特征阻抗为

$$Z_0 = \frac{\ln(2d/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad (16)$$

本小问考察了镜像法, 利用这种方法, 可以方便地解出本题。

## 第三部分: 射频反射技术基础

### 问题 3.1

在两个阻抗接口处, 电压满足

$$V_i + V_r = V_t \quad (17)$$

原电流与反射电流方向相反, 有:

$$\frac{V_i}{Z_0} - \frac{V_r}{Z_0} = \frac{V_t}{Z_1} \quad (18)$$

当  $Z_0 \neq Z_1, V_r \neq 0$ , 可以看到信号反射是由于阻抗不一致引起的。由反射率定义式  $\Gamma = V_r/V_i$  可以给出:

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (19)$$

### 问题 3.2

若反射过程信号相位改变  $\pi$ , 表明  $V_r$  与  $V_i$  符号相反, 因而要求  $\Gamma < 0$ , 也就是  $Z_1 < Z_0$ 。

本小问给出了射频电磁波在电缆中传输, 最基础的理论知识, 包括电流电压关系、反射率、反射信号与入射信号的相位关系。

## 第四部分: 单电子晶体管 SET

### 问题: 4.1

在这里只考虑栅电容  $C_g$ , 其他电容远小于栅电容, 可以忽略不计。量子点相当于栅电容的一块极板, 囚禁在量子点中的  $n$  个电子的电荷量为  $q = -ne$  ( $e > 0$ ), 这就是栅电容  $C_g$  所带的电荷。所以, 在栅电容下极板有电量为  $ne$  的电荷聚集, 栅电容电势差恒为  $V_g$ 。可得量子点的电势为:

$$\varphi_n = V_g + \frac{-ne}{C_g} \quad (20)$$

将无穷小的电荷  $\delta q$  从电势为 0 处移到电势为  $\varphi(q)$  处所需的能量为  $\delta E = \varphi(q) \delta q$ , 电容器的电势和极板积聚的电荷满足线性关系。当移动一个电子(电量为  $-e$ ), 电势从  $\varphi_n$  变成  $\varphi_{n+1} = \varphi_n - e/C_g$ , 因而在量子点上积蓄电量  $e$  所做的功为:

$$\Delta E_n = -e \frac{\varphi_n + \varphi_{n+1}}{2} \quad (21)$$

$$\Delta E_n = \frac{e^2}{C_g} \left( n + \frac{1}{2} \right) - eV_g \quad (22)$$

另外,  $\Delta E_n$  也可以由克服电源非静电力求得:

$$\Delta E_n = \frac{e^2(n+1)^2}{2C_g} - \frac{e^2 n^2}{2C_g} - eV_g = \frac{e^2}{C_g} \left( n + \frac{1}{2} \right) - eV_g \quad (23)$$

在没有  $C_i \ll C_g$  近似的情况下, 附加能量为:

$$\Delta E_n = \frac{e^2}{C_g + 2C_i} \left( n + \frac{1}{2} \right) - eV_g C_g / (2C_i + C_g)。$$

### 问题 4.2

$N$  是满足  $\Delta E_n \geq 0$  的最小整数, 若  $V_g = V_0$  时  $\Delta E_N = 0$ , 即

$$\Delta E_N(V_0) = 0 = \frac{e^2}{C_g} \left( N + \frac{1}{2} \right) - eV_0 \quad (24)$$

如果  $V_g$  稍大于  $V_0$ , 则  $\Delta E_n < 0$ ; 若从  $N$  变化到  $N+1$ ,  $\Delta E_n > 0$ , 因而有  $E_c = \Delta E_{N+1}(V_0)$ , 所以

$$\Delta E_{N+1}(V_0) = E_c = \frac{e^2}{C_g} \left( N + 1 + \frac{1}{2} \right) - eV_0 = \frac{e^2}{C_g} \quad (25)$$

### 问题 4.3

在金属中, 只有当电子的能量在  $k_B T$  的量级才会参与热运动,  $k_B$  为玻尔兹曼常数。若电子不因为热运动转移到量子点, 只需要每个电子平均能量不大于特征附加能量, 即  $k_B T < E_{c0}$ 。

### 问题 4.4

量子点隧穿时间为  $\tau = R_i C_i$

由能量与时间的不确定关系有  $E_c \tau > h$ , 即

$$h/\tau < E_c \rightarrow \frac{h}{R_i C_i} < \frac{e^2}{C_g} \quad (26)$$

$$R_i > \frac{h C_g}{e^2 C_i} > \frac{h}{e^2} \quad (27)$$

单电子晶体管 (SET) 由一个量子点 (量子点是一个孤立导体, 电子被局域在量子点中) 和它附近的电极构成。本问的背景知识包括量子点、晶体管, 但实际上是用经典电磁学中的电势、做功, 以及热运动、量子论中的不确定关系等知识, 就可以求解本题。

## 第五部分: 利用射频反射法读取 SET 的 ON 与 OFF 态

### 问题 5.1

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{SET}} - Z_0}{Z_{\text{SET}} + Z_0} \quad (28)$$

$$\Gamma_{\text{ON}} = \frac{10^5 - 50}{10^5 + 50} \approx 1 - 2 \frac{50}{10^5} \quad (29)$$

$$\Gamma_{\text{OFF}} = \lim_{Z_1 \rightarrow \infty} \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 1 \quad (30)$$

$$\Delta \Gamma = |\Gamma_{\text{ON}} - \Gamma_{\text{OFF}}| \approx 1.0 \times 10^{-3} \quad (31)$$

### 问题 5.2

如果反射率较大, 当 SET 在 ON 态 ( $Z_{\text{SET}} = 100 \text{ k}\Omega$ ) 与 OFF 态 ( $Z_{\text{SET}} \rightarrow \infty$ ) 之间变化, 要求阻抗  $Z_1$  从  $Z_1 < Z_0$  切换到  $Z_1 > Z_0$ 。

当 SET 处于 OFF 态, 电路是无耗散 LC 振荡电路, 共振频率为  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ , 阻抗为 0。当  $\omega_0 = \omega_{\text{rf}}$ , 有:

$$L_0 = \frac{1}{\omega_{\text{rf}}^2 C_0} \quad (32)$$

当 SET 处于 OFF 态, 电路的总阻抗  $Z_{\text{tot}} = 0$ , 反射率为  $\Gamma_{\text{off}} = -1$ ; 当切换到 SET 的 ON 态 ( $Z_{\text{SET}} = R_{\text{SET}} = 10^5 \Omega$ ), 如果总阻抗  $|Z_{\text{tot}}|$  不小于  $Z_0$ , 当  $\omega_0 = \omega_{\text{rf}}$ , SET 的 ON 态总阻抗  $Z_{\text{tot}}$  为:

$$Z_{\text{tot}} = \left( \frac{1}{j\omega C_0} + \frac{1}{R_{\text{SET}}} \right)^{-1} + j\omega L_0 = \frac{R_{\text{SET}} + j\sqrt{L_0/C_0}}{1 + R_{\text{SET}}^2 C_0/L_0} \quad (33)$$

当  $C_0 = 0.4 \times 10^{-12} \text{ F}$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $\omega_{\text{rf}} = 2\pi \times 10^8 \text{ Hz}$ , 可得  $L_0 = 6.33 \mu\text{H}$ ,  $Z_{\text{tot}} = (158 + 6.3j)\Omega$ ,  $\Gamma_{\text{ON}} = 0.5198 + 0.0145j$ ,  $\Delta \Gamma = 1.52$ 。

本部分的问题, 需要看懂题目中的“利用射频反射法来测量反射信号的强度和相位, 从而确定反射率”, 弄清 SET 在“开”和“关”状态下的阻抗、电感, 根据所给出的电路图, 通过阻抗串联公式, 代入相关数据后计算得到。用到的知识包括阻抗、共振频率、电感等。

## 第六部分: 单导线量子点 (SLQD) 的电荷感应

### 问题 6.1

SLQD 电路中只有电抗元件, 因而总有  $|\Gamma| = 1$ 。SLQD 的 OFF 态中电感  $L_0$  与电容  $C_0$  并联, 当

$$\omega_{\text{rf}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (34)$$

则 OFF 态的总阻抗无限大,  $\Gamma_{\text{off}} = 1$ 。

SLQD 的 ON 态对应于  $Z_{\text{SET}} = -j \frac{1}{\omega_{\text{rf}} C_q}$ , 当  $\omega_0 = \omega_{\text{rf}}$ , SLQD 的阻抗为:

$$Z_{\text{tot}} = \frac{1}{(j\omega_{\text{rf}}L_0)^{-1} + j\omega_{\text{rf}}(C_0 + C_q)} = -j \frac{1}{\omega_0 C_q} = -j \frac{C_0}{C_q} Z_c \quad (35)$$

$Z_{\text{tot}}$  为虚数,若  $\Gamma_{\text{ON}} = \frac{Z_{\text{tot}} - Z_0}{Z_{\text{tot}} + Z_0}$  的复相不为 0,则

$|Z_{\text{tot}}| \sim Z_0$ , 因而有:

$$Z_c \sim \frac{C_q}{C_0} Z_0 \quad (36)$$

### 问题 6.2

如果  $L_0$  是固定不变的,当频率为

$$\omega_{\text{rf}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (37)$$

仍然可以有  $\Gamma_{\text{OFF}} = 1$ 。然而,当  $Z_c \ll \frac{Z_0 C_q}{C_0}$  不能很好满足时,我们需要其他方法来增加  $|Z_{\text{tot}}|$ , 其中一个方法是通过增加电容  $C_m$  来与电路串联,当  $\omega_0 = \omega_{\text{rf}}$ , 有

$$Z_{\text{tot}} = -j \left( \frac{C_0}{C_q} Z_c + \frac{1}{\omega_0 C_m} \right) = -\frac{j}{\omega_0} \left( \frac{1}{C_q} + \frac{1}{C_m} \right) \quad (38)$$

为了使得  $|Z_{\text{tot}}| = Z_0$  ( $\Gamma_{\text{ON}} = j$ ,  $\Delta\Gamma = \sqrt{2} \sim 1$ ), 需要

$$C_m = \frac{C_q}{Z_0 C_q \omega_{\text{rf}} - 1} = \frac{C_q \sqrt{L_0 C_0}}{Z_0 C_q - \sqrt{L_0 C_0}} \quad (39)$$

当  $Z_c \ll \frac{Z_0 C_q}{C_0}$ ,

$$C_m = \frac{C_q Z_c}{Z_0 C_q / C_0 - Z_c} \approx \frac{1}{Z_0 \omega_{\text{rf}}} \quad (40)$$

本部分需要通过阅读,弄清单导线量子点(SLQD)的特点(OFF态,表现为一个绝缘体。ON态等效为一个电容,电容值为  $C_q$ ),结合所给出的电路图,进行推算。最后一问是开放式的问题,在限定条件下,给出一种设计方案。题中给出的答案是串联一个电容,利用提给条件,计算出电容值。还是用到前面用过的阻抗、共振频率等知识。

### 赛题背景:

本赛题的题目是“利用射频反射技术从硅基量子计算机中读取自旋信息”。实际上,并没有涉及到太多的量子计算机和自旋知识,而是以此为背景,考察了电波在电缆中的传输、反射、以及如何读

取“开”、“关”状态这几方面的知识。

射频技术:射频(Radio Frequency,缩写为RF)技术是利用射频波的一种技术,较常见的应用有无线射频识别(Radio Frequency Identification,RFID),这是一种非接触的自动识别技术,其基本原理是利用射频信号和空间耦合(电感或电磁耦合)或雷达反射的传输特性,实现对被识别物体的自动识别。

RFID系统一般有三个部分:(1)接收器或标签(Tag),由耦合元件及芯片组成,每个标签具有唯一的电子编码,附着在物体上标识目标对象;(2)扫描器或阅读器(Reader):读取(有时还可以写入)标签信息的设备,可设计为手持式或固定式;(3)天线(Antenna):在标签和读取器间传递射频信号。在应用时,扫描器(阅读器)发射某个特定频率的无线电波(射频电波),接收器(标签)收到后,立即驱动内部电路发射出代码,扫描器接收到该代码,这样就完成了一次通信,传递信号是由天线完成的。根据通信结果,可以识别出接收器和扫描器是否匹配。接收器不需要电池,工作时无需刷卡接触,也不怕脏污(通过发射射频信号来识别,而不是读取卡片上信息)。尤其是发射出的代码是唯一的,不可复制的。因此具有安全性高、寿命长的优点。我们日常生活中所说的感应式电子晶片或近接卡、感应卡、非接触卡、电子标签、电子条码等都属于RFID,商场购物、门禁管制、停车场管理、自动化生产线等等,都广泛使用RFID。

量子点:量子点(Quantum Dot)是在把激子(在半导体中通过某种机制在空间上束缚在一起的空穴-电子结合体称为激子)在三个空间方向上束缚住的半导体纳米结构。一个量子点所带的电量是元电荷的整数倍(1-100)。小的量子点,只有2到10个纳米,自组装量子点的典型尺寸在10到50纳米之间,在一个量子点体积中可以包含100到100 000个原子。

单电子晶体管:第一个单电子晶体管(SET)由贝尔实验室的Fulton等人制成。SET通过隧穿效应控制电子来执行各种操作。单电子晶体管(SET)由一个量子点(量子点是一个孤立导体,电子被局域在量子点中)和它附近的电极构成。栅极G通过栅



电容与量子点连接,源极S与漏极D通过隧道结与量子点连接。由于使用的电子很少,其功耗很低、开关速度很快。被认为是下一代低功耗、高密度超大规模集成电路的理想的基本器件单元,也是量子计算机的基本器件。

量子计算机:量子计算机(quantum computer)在数学和逻辑运算、存储及处理量子信息时遵循量子力学的规律,其处理和计算的是量子信息,使用的是量子算法。量子计算机具有运行速度快、处置信息能力强的特点。量子计算机也是由硬件和软件组成,单电子晶体管(SET)就是量子计算机硬件的重要组成单元,其控制开关的速度很快。

20世纪80年代初期,Benioff首先提出了量子

计算的思想,并设计一台可执行的、有经典类比的量子 Turing。1982年Feynman提出了按照量子力学规律工作计算机的概念。2007年,加拿大DWave公司成功研制出一台具有16昆比特的“猎户星座”量子计算机,2012年加州理工学院量子理论物理学家 John Preskill 提出乐“量子霸权(Quantum Supremacy)”的定义,量子计算设备可以超越经典计算设备,解决后者无法解决的计算任务。2019年,谷歌公司宣称实现了“量子霸权”,其设计出量子计算机的只需200秒就能解决世界上最快的超级计算机要花一万年才能解决的问题。现在,量子计算机的发展极其迅速,不断有新的成果出现,中国在这方面也取得了举世瞩目的成果。



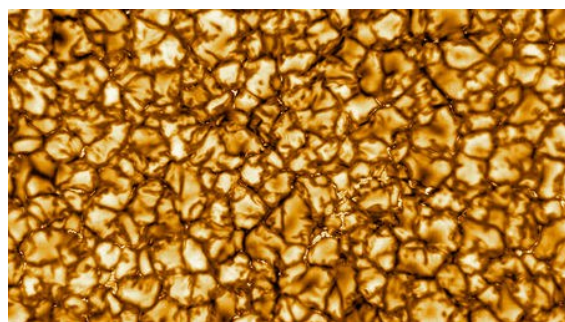
### 科苑快讯

## 世界最大的太阳望远镜首次拍照

这张太阳表面湍流沸腾等离子体的最新特写,是有史以来最大太阳望远镜的首张照片。它有一面4米宽的镜子,是现有任何太阳望远镜的两倍大,位于夏威夷毛伊岛(Maui)哈雷阿卡拉(Haleakala)山顶3000米处的制高点,丹尼尔·井上太阳望远镜(DKIST, Daniel K. Inouye Solar Telescope)将揭示太阳从内部向其大气(日冕)输送能量过程中前所未有的细节。

研究人员希望通过放大图中的细胞样结构(每个细胞样结构大约有美国得克萨斯州那么大),能够了解是什么原因导致太阳向太空发射威力如此巨大的耀斑,对地球卫星、电网和通讯造成潜在破坏。这些信息可以帮助科学家提前几天而不是几分钟发出警告。

DKIST的研究人员还希望最终解决令人困扰的太阳之谜,比如为什么日冕(温度超过100万摄氏度)比太阳表面热得多,是什么将太阳风吹向太空的。DKIST不是自己在战斗,美国宇航局(NASA)2018年发射、用于探测和对太阳大气层取样的帕克太阳探测器(Parker Solar Probe),以及欧洲太空总署(European



Space Agency)将于下月发射、用于探测太阳高纬度地区的太阳轨道飞行器(Solar Orbiter),都将为其工作提供帮助。

DKIST需要强大的冷却系统去除其主镜上聚集的13千瓦热量。它还采用了可变形的光学系统以补偿大气中使其视野模糊的湍流。在第一幅光图像之后,DKIST将经历6个月的调试,然后准备在最新太阳周期中的第一个太阳黑子开始趋近最大值时开始工作。

(高凌云编译自2020年1月29日 [www.sciencemag.org](http://www.sciencemag.org))