类比费马原理巧解运动性最值问题

李志强

(山东省济宁市任城区教育体育局教研中心 272023)

1657年,法国著名数学家费马(P. Fermat,1601~1665)提出了费马原理(Fermat' s principle):光在指定的两点之间传播,实际的光程总是取极值(极小值、极大值或稳定值)。这里的光程是指光在某种均匀介质中传播时通过的路程与该种介质的折射率的乘积。

$$s_m = n_1d_1 + n_2d_2 = \frac{c}{v_1}d_1 + \frac{c}{v_2}d_2 = c\left(\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}\right) = c(t_1 + t_2) = ct_m。$$

上式表明光在两点之间传播,时间总是取极值(极小值、极大值或稳定值)。还有,虽然光程也存在取极大值和稳定值的情形(譬如傍轴条件下薄透镜的物像之间具有等光程性),但在绝大部分情况下,光程取极小值,像几何光学中的直线传播定律、反射定律、折射定律以及光路可逆性原理等都是费马原理在此意义下的高度概括和具体体现。

在运动学中,我们经常遇到质点在两点间或两个区域运动时,速度方向改变作折线运动求最值问题,对这类问题的解答,采用常规的解法较为繁杂、棘手,如果借助光的传播选择用时最短的原则即费马原理类比求解,往往可快速、简捷、出奇制胜地解决此类问题。

一、类比光的反射定律求运动性最值

例1 如图1所示,墙M与墙N交汇于O,水平地面上有P、Q两点,一只小虫从P点出发,沿直线爬行到墙M边上的某点,遇到障碍后,改变运动方向又沿直线爬行碰到墙N边上的某点,再次改变运动方向沿直线爬行到Q点,若小虫的爬行速率恒为0.1 m/s,墙角为直角,P点到墙M、墙N的距离分别为1 m和2 m,Q点到墙M、墙N的距离分别为3 m和1 m,求小虫可能爬行最短的时间是多少?

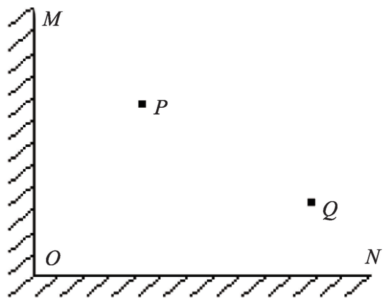

图1

分析与解:本题是涉及到小虫作两次折线运动,求如何确定路径费时最短,显然用常规方法很难解决,可类比光的反射定律进行求解。假设从A点发出一条光线经墙M和墙N反射后过Q点,如图2所示,分别作出P、Q的像点P'、Q',连接$P'Q'$与墙M、墙N的交点为O_1和O_2,光线沿$P\ O_1\ O_2Q$进行传

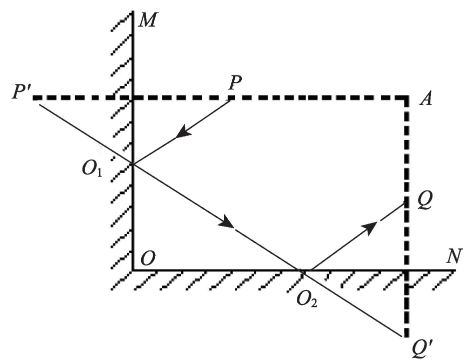

图2

播，即小虫沿 PO_1O_2Q 折线运动用时最短。由对称可知：小虫运动的路程大小等于 $P'Q'$ 的长度，连接 PP' 与 QQ' 并延长交点为 A，在 $\triangle P'Q'A$ 中，$P'A$=4 m、$Q'A$=3 m，则 $P'Q'$=5 m，所以小虫最短运动时间为 500 s。

例 2 如图 3 所示，一条平直河流 M 的一侧有 A、B 两个工厂，它们到河岸的垂直距离分别是 d_1=12 km，d_2=16 km，从 A 工厂到河流 M 的垂足是 C，从 B 工厂到河流 M 的垂足是 D，C、D 间相距 d=21 km。现要在河边建一抽水站，把河水送到 A、B 两个工厂去。这个抽水站应当建在何处，才能使需要铺设的输水管总长度最短？

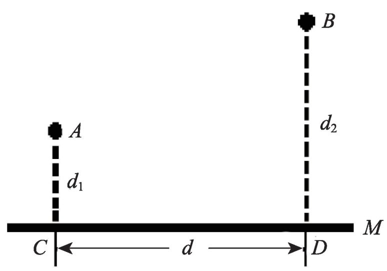

图 3

分析与解：本题可以通过类比光的反射定律，巧妙地解决实际生活中的抽水站的选址问题。设抽水站建于 E 点。作 A 关于 M 对称的点 A'，连 BA' 交于 M 一点，即为 E 点，如图 4 所示。我们把铺设的输水管类比于光线，河岸 M 类比于反射面，输水管的长度即为光程长度。根据反射定律可知，由 A 发出的光线经 M 反射后达到 B 的光程最短，即输水管长度最短。设 C、E 相距为 x km，E、D 相距 $(21-x)$ km，由图知，$\triangle CA'E \backsim \triangle DBE$，有：

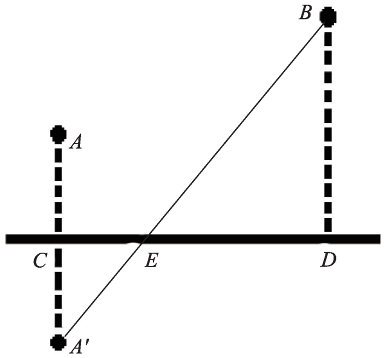

图 4

$$\frac{x}{d_1}=\frac{21-x}{d_2},\quad x=9\ (\text{km})。$$

即抽水站应建在离 C 点 9 km 处。

二、类比光的折射定律求运动性最值

例 3 如图 5 所示，平静的河面离岸 40 m 的 A 处，有一小孩不慎落水，距河岸 15 m 的 B 处有一青年听到求救声后，马上进行营救，若他在陆地奔跑的平均速度为 8 m/s，水中游泳的平均速度为 6 m/s，AB 沿河岸方向的长度为 50 m，请问该青年如何选择路径才可尽快地救起小孩？

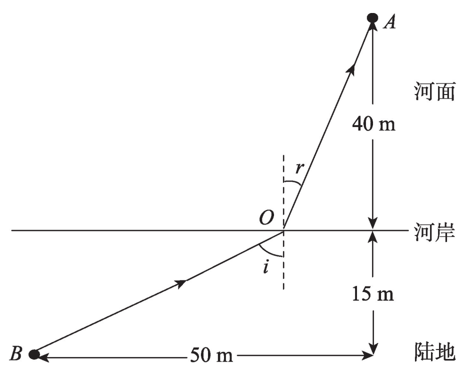

图 5

分析与解：由费马原理，该青年以两种不同速度在陆地和水中运动，他应作折线运动，运动路径与河岸垂线的夹角满足“折射定律”。设该青年从 B 点沿直线运动到 O，再从 O 处入水游到 A，运动路线与直河岸垂线的夹角分别为 i、r，由“折射定律”有：

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_{水}}{n_{地}}=\frac{v_{地}}{v_{水}},$$

又根据几何关系，有 $40\tan r+15\tan i=50$，

联立以上两式得出 $i=53°$，$r=37°$。

再由几何关系求得：$BO=\dfrac{15}{\cos i}=25(\text{m})$，$OA=\dfrac{40}{\cos r}=50(\text{m})$，即该青年应沿与河岸成 37° 的直线奔跑 25 m 到河岸，再入水沿与河岸成 53° 的直线游到 A 处。

例 4 有一个很大的湖，岸边(可视湖岸为直线)停放着一艘小船，缆绳突然断开，小船被风刮跑，其

方向与湖岸成15°角，速度为2.5 km/h。同时岸上一人从停放点去追赶小船，已知他在岸上跑的速度为4.0 km/h，在水中游的速度为2.0 km/h，问此人能否追及小船？

分析与解：费马原理指出：光总是沿着光程为极小值的路径传播。据此可以证明，光在平面分界面上的折射是以时间为极小值的路程传播。本题求最短时间问题，可类比在平面分界面上的折射情况，这样就把一个运动问题通过类比转化为光的折射问题求解。

如图6所示，船沿OP方向被刮跑，设人从O点出发先沿湖岸跑，在A点入水游到OP线上的B点，如果符合光的折射定律，则所用时间最短。

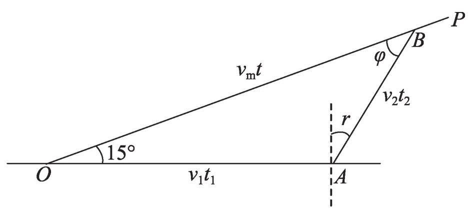

图6

人从A处下水就相当于入射光的入射角为i=90°，根据光的折射定律：

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{4.0}{2.0},$$

解得　r=30°。

从而　φ=180°−15°−(90°+r)=45°。

在此最短时间内，若船还未到达B点，则人能追上小船，若船已经通过了B点，则人不能追上小船，所以船刚好能到达B点所对应的船速就是小船能被追及的最大船速v_m。

根据正弦定理　$$\frac{v_m t}{\sin(90^\circ+r)}=\frac{v_1 t_1}{\sin\varphi}=\frac{v_2 t_2}{\sin 15^\circ}$$

又　$t=t_1+t_2$，

由以上两式可解得　$v_m=2\sqrt{2}$ (km/h)。

此即小船能被人追上的最大速度，而小船实际速度只有2.5 km/h，小于$2\sqrt{2}$ km/h，所以人能追上小船。

例5　田野上有一条直路，山羊沿直路行进的速率不超过v，在田野上的速率不超过u，且$u<v$，试确定山羊在时间t内可能到达的区域。

分析与解：把山羊视作粒子，直路相当于“光疏介质”，田野相当于“光密介质”。今设山羊从原点O出发，先沿直线(x轴正方向)以速率v奔跑时间t_1到达A点，然后折入田野以速率u沿与x轴正方向夹角为(90°−α)方向奔跑时间t_2=t−t_1，恰好到达最远点B，如图7所示，则由折射定律有

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin\alpha}=\frac{v}{u}。$$

令B的坐标为(x,y)，则

$$t=t_1+t_2=\frac{x-y\tan\alpha}{v}+\frac{y}{u\cos\alpha},$$

化简得　$y=-\tan\alpha\cdot x+vt\cdot\tan\alpha$。

而直线AB的斜率$k'=\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$，由此可知上式表示的直线与直线$AB$垂直，现在过$B$点作$AB$的垂线与$x$、$y$轴分别交于$P$、$Q$，所以山羊在时间$t$内可能到达的区域如图8所示。由4个直角三角形及2个扇形组成，其中$OP=vt$，$OM=ut$。

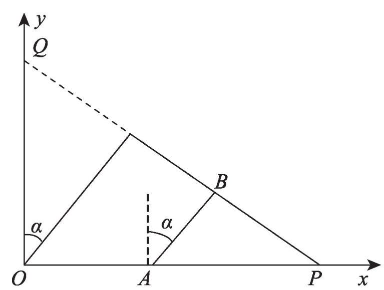

图7

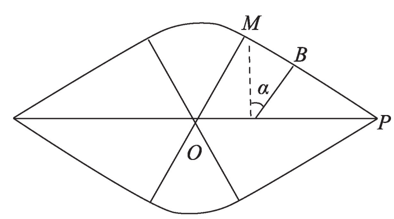

图8

三、类比光的全反射现象求运动性最值

例6　如图9所示，一辆小车在轨道AB上行驶时速度为v_1 = 50 km/h，在轨道以外的平地上行驶时速度为v_2 = 40 km/h，在与轨道的垂直距离为PM=30 km处有一仓库P，问小车从仓库出发到距离M

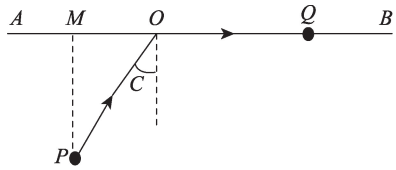

图9

点100 km的Q处的过程中至少需要多少时间?

分析与解:本题属于一道数学行程问题,若用常规解法显然是相当繁琐的。我们知道,光在传播中“走”的是时间最短的路径。可见,我们可以把小车的运动类比于光的全反射现象,转化为光的全反射的临界状态进行分析,作图9的光传播图。

根据全反射知识得:

$$\sin C=\frac{1}{n}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{4}{5}。$$

设 $MO=x$ km,在 Rt△PMO 中,有 $\sin C=\frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}$。

小车运动时间 $t=\frac{100-x}{v_1}+\frac{\sqrt{x^2+30^2}}{v_2}$。

由以上几式可得 $x=40(\text{km})$,$t=2.45(\text{h})$。

值得一提的是,对于前面的例4,人沿湖岸从O运动到A后,入水游到B点追到小船,人的运动路线类似光的全反射的逆过程。因此,若将人的运动过程倒过来考虑(逆向思维),则该题变成人从B点怎样运动到O点用时最短的问题。这样,该题亦可转化为光的全反射的临界状态进行求解,其解题过程这里不再赘述。当然,对于前面的例5,情形亦然。

例7 如图10所示,湖中有一小岛M,M与湖岸的直线距离为d,湖岸边有一点N沿湖岸方向与M的距离为l,一人自M处出发,要到达N点。已知他在水中游泳的速度为v_1,岸上行走的速度为v_2(且$v_1<v_2$),要求他由M到N所用的时间最短,问此人应如何选择其运动路径?

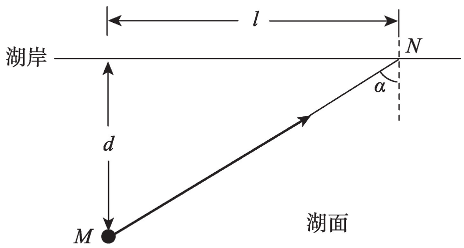

图10

分析与解:类比费马原理解此题,光线可能直接从M传播到N,也可能是通过全反射到达N,至于采用何种方式,应分具体情况进行讨论。先连接MN,对应的入射角设为α,有:

$$\tan\alpha=\frac{l}{d},$$

得 $\alpha=\arctan\frac{l}{d}$。

若“光线”在湖岸折射的临界角为C,有:

$$\sin C=\frac{n_{地}}{n_{水}}=\frac{v_2}{v_1},$$

得 $C=\arcsin\frac{v_2}{v_1}$。

下面进行讨论:

(1) 若α不大于临界角C,光线直接由M传播到N所用时间最短,即:

$$\arctan\frac{l}{d}\leqslant\arcsin\frac{v_2}{v_1},$$

此时人直接由M游到N所用时间最短。

(2) 若α大于临界角C,即:

$$\arctan\frac{l}{d}>\arcsin\frac{v_2}{v_1},$$

此时人应该以与湖岸垂直方向成$\alpha'=C=\arcsin\frac{v_2}{v_1}$的路线先游到岸边,再上岸沿湖岸步行到$N$才费时最短。

可见,质点的一些运动性最值问题与光的传播原理十分类似,完全可以进行类比来解决。当然,物理学中可以类比的模型还有很多,如机械振动可以用电磁振荡来类比,薄透镜成像规律可以用电阻并联来类比,玻尔氢原子模型中电子绕原子核的旋转可以用人造地球卫星绕地球运转的模型来类比等等。在物理教学中,我们若能经常巧妙地利用一些类比教学,不仅可以加深学生对问题的认识,有助于对问题的处理,而且可以开阔学生的视野,锻炼他们的思维品质。诚如德国著名天文学家开普勒(J. Kepler,1571~1630)所说:“我珍惜类比胜于任何别的东西,它是我最可信赖的老师。”