从麦克斯韦方程组到电磁波方程

董广宇

麦克斯韦方程组的威名可谓如雷贯耳，是经典电磁学的最高成就。

先来看看麦克斯韦方程组的样子：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon}=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot \mathrm{d}V$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\int_S\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu I+\varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}=$$

$$\int_S \mu\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\left(\mu\boldsymbol{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

方程组写成以上形式，需要一个前提：空间中的媒质是各向同性的(即，媒质中的每一点的物理性质不随方向改变)。

方程组的一式描述了电荷产生电场的高斯定律，二式描述了变化的磁场产生电场的法拉第电磁感应定律，三式描述了磁单极子不存在的高斯磁定律，四式描述了电流和变化的电场产生磁场的麦克斯韦 - 安培环路定律。

有物理意义上的场必定存在物理意义上的源，因此，我们可以发现，麦克斯韦方程组等式的左边是场，右边是源。由于，变化的电场产生磁场，变化的磁场产生电场；又由于，只存在电荷而不存在磁荷(即不存在磁单极子，或者理解为，电力线是发散的，而磁力线是闭合的，使得具有终始方向的磁感应强度 B 与闭合曲面 S 的积分总为 0)；所以，根据方程组，只要在已知电荷分布和电流分布(即运动电荷)的情况下，就可以得到电场和磁场的唯一分布。

在如今物理学的教材中，标准的麦克斯韦方程组都是以上述四个积分形式出现的，不过，方程组的最初形式却并不是这样。麦克斯韦本人当年(1865 年)在论文《电磁场动力论》中写下的是 20 个方程，都是分量形式，不是矢量形式；上述的这四个矢量积分形式的方程组是由另一位物理学家赫兹在 1890 年写出的。

一辆汽车在正常行驶和交通拥堵时所占面积。

在这两种情况下，车道的宽度为约 4 m，交通拥堵时相邻车辆间隔约半个车长，车长约 4 m，所以在交通拥堵情况下一辆车所占面积为 4 m×6 m 约 20 m^2，车的质量一般为 2 吨，于是得到其质量密度为：

$$\sigma=M/A=2000\mathrm{kg}/20\mathrm{m}^2=100\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2\text{。}$$

正常行驶时车辆一般留有 2s 的行车间距，这就是说当车辆以每小时 60 英里(约 30m/s)的速度行驶时，两车之间驾驶员应留有 60m 的距离，因此正常行驶时每辆车所占面积为：

$$A=4\mathrm{m}\times 60\mathrm{m}=240\ \mathrm{m}^2\text{。}$$

约为交通拥堵时的 10 倍

其质量密度为：

$$\sigma=M/A=2000\mathrm{kg}/240\mathrm{m}^2=10\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2\text{。}$$

若在某交通高峰时刻，某一方向交通拥堵，另一方向可正常行驶，则其平均质量密度为 50kg/m^2，卡车的话可能还要再提高至少两倍。

好了，现在我们来估算一下庆典当天行人的质量密度。每平方米能够站多少人呢？当人们拥挤在一起时，每平方米可以站的人数多于 1 人少于 20 人，取其几何平均值为 4 人，每个人质量为 100 kg(典型的美国人的体型标准，不是吗？)，于是得到行人的质量密度为 400 kg/m^2。行人的质量密度至少是正常行驶时汽车质量密度的 40 倍，交通高峰时段的 8 倍，是交通拥堵时段的 4 倍。

如此看来工程师们的担心还是很有道理的。

关于麦克斯韦方程组，物理学教材都告诉学生：麦克斯韦从他的方程组中推导出了电磁波的存在，并同时做出两项预言，电磁波的传播速度可以达到光速、光是一种电磁波，后来被赫兹用实验所证实。虽说很多人都知道这一事实，但很少有人去思考：如何从麦克斯韦方程组推导出电磁波的存在。

要从麦克斯韦方程组推导出电磁波，最关键的一个步骤是：采用什么方法，把方程组的积分形式演变到微分形式。令人感到有些奇怪的是，对于这个关键的步骤，几乎所有的物理学教材中都没有展示，而这正是写下本文的意义所在。

为解决这个问题，需要引进数学上的矢量分析。

大家都知道，在物理学里，E 和 B 代表着电场强度和磁感应强度 (想一下，为什么不把 B 对称地叫做磁场强度？然后去翻查物理史资料，会发现里面的历史其实很有趣，也可以顺便了解 E 和 B 之间的联系)，所以就理所当然地认为麦克斯韦方程组中的 E 和 B 就是矢量电场强度和矢量感应强度。其实这样的理解并不完全正确，方程组中的 E 和 B 表示的是矢量场，即：空间中任意一点 $(x，y，z)$，在时刻 t 的电场强度 (或磁感应强度) 的大小和方向，用数学的方式表示：

$$\boldsymbol{E} = E(x,y,z,t) = E(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{B} = B(x,y,z,t) = B(\boldsymbol{r},t)$$

要研究一个矢量场的性质，可完全用散度和旋度来表明。因此，为了解矢量场 E、B，我们需要知道 E、B 的散度和旋度。

先来看散度。所谓散度，是指：在一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，空间上存在一个点 p，围绕该点作一闭合曲面 $\boldsymbol{S}$(曲面 S 上每一处的法线方向都是向外)，矢量场 A 与该曲面 S 的积分定义为矢量场 A 穿过闭合曲面 S 的通量，再设闭合曲面 S 包围的体积为 ΔV，当 ΔV 趋向于 0 时 (此时 S 的也趋向于 0，记为 dS)，我们把矢量场 A 穿过闭合曲面 dS 的通量与 ΔV 的比值称为矢量场 A 在 p 点的散度，散度的符号记为 div，用数学公式表示如下：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ S\to 0}}\frac{\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

散度是一个标量，没有方向，在一个矢量场 A 中，空间每一点的散度构成一个散度标量场。在直角坐标系中，散度的运算表达式为：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

根据上面两式作一番变换：

$$\because \operatorname{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ S\to 0}}\frac{\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ \mathrm{d}S\to 0}}\frac{\int_{\mathrm{d}S} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \operatorname{div}\boldsymbol{A}\cdot\Delta V = \operatorname{div}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}V$$

$$\therefore \oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}V = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}V$$

这个结果公式也称为高斯 - 奥斯特罗格拉茨基公式 (也可称为矢量场的散度定理)。有了这个公式之后，将此式与麦克斯韦方程组中的一式三式比较，可以容易得到：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

再来看旋度。比起散度，旋度的概念有些复杂。先给出矢量场的环量面密度概念：在一个矢量场 A 中，空间上存在一个点 p，围绕该点作一闭合回路 L，回路的绕行方向和回路所在面的法线方向符合右手螺旋关系，矢量场 A 与该回路 L 的积分定义为矢量场 A 经过闭合回路 L 的环量，再设闭合回路 L 所包围的面积为 ΔS，当 ΔS 趋向于 0 时 (此时 L 也趋向于 0，记为 dl)，我们把矢量场 A 经过闭合回路 dl 的环量与 ΔS 的比值称为矢量场 A 在 p 点沿 ΔS 法线方向的环量面密度，用数学公式表示如下：

$$\rho_{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}} = \lim_{\substack{\Delta \boldsymbol{S}\to 0\\ L\to 0}}\frac{\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_n}$$

由此可知，环量面密度是一个与方向有关的概念。有了环量面密度的概念后，现在可以给出旋度的定义了：在一个矢量场 A 中，空间上有一点 p，如果在该点处存在一个矢量 P，使得矢量场 A 在点 p 处沿着矢量 P 方向的环量面密度为最大，而这个最大值正好等于矢量 P 的绝对值，我们就把矢量 P 称为矢量场 A 在点 p 处的旋度，旋度的符号记为 rot，用

数学公式表示：

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

旋度是一个矢量，有方向也有数值，在一个矢量场 A 中，空间每一点的旋度构成了一个旋度矢量场。那么，在知道了一个矢量场 A 的情况下，如何求得矢量场 A 的旋度呢？在直角坐标系下，旋度的运算表达式为：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

我们现在再来回顾一下旋度的定义，其中最关键的是：在点 p 处，如何找到该处环量面密度最大的方向。结合环量面密度的定义公式来看，如果 dl 的方向处处与矢量场 A 相同，则求得的环量面密度即为最大，因此，在点 p 处，根据矢量场 A 的方向，选择合适的闭合回路 dl 与绕行方向，就可求得该点的旋度，我们将环量面密度的定义式作一番变换：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\rho_{\Delta\boldsymbol{S}}^{M}\cdot\boldsymbol{e}_n=\lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{S}\to 0\\ L\to 0}}\frac{\int_L \boldsymbol{A}\cdot d\,\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_n}\boldsymbol{e}_n=\lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{S}\to 0\\ L\to 0}}\frac{\int_L \boldsymbol{A}\cdot d\,\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}}$$

上式中的上标 M 表示：选择了合适的闭合回路 dl 之后，计算出来的该处最大的环量面密度。根据上式，再进行推导：

$$\because \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{S}\to 0\\ L\to 0}}\frac{\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}}=\lim_{\substack{\Delta\boldsymbol{S}\to 0\\ dl\to 0}}\frac{\int_{dl} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta\boldsymbol{S}}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\therefore \oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这个结果公式也称为斯托克斯公式（也可称为矢量场的旋度定理）。有了这个公式之后，将此式与麦克斯韦方程组中的二式四式比较，可以容易得到：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

是否还记得前面的两个微分形式？我们现在已经得到了四个微分形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

这四个微分形式正是我们非常熟悉的麦克斯韦方程组的微分公式，文章开头列出来的是积分公式。

现在我们从这四个微分公式推导出电磁波方程。

在一个自由的各向同性的媒质空间中（即，没有电荷分布和电流分布，ρ=0，矢量场 J=0），麦克斯韦方程组的微分形式就可以写成：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

根据以上四式和矢量分析的运算法则，可以得到：

$$\because \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\times(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})=-(\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\because \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=\nabla(0)-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

$$\therefore \nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

同样的方法，可以得到：

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

这两个结果式再进行整理：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon_r\mu_r}{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon_r\mu_r}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon_r\mu_r}{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon_r\mu_r}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

最后可得：

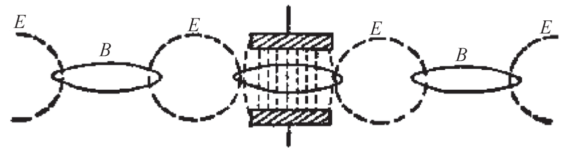
$$\nabla^2 \boldsymbol{E}=\frac{1}{(\frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}})^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}=\frac{1}{(\frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}})^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

以上两式就是电磁波方程，可以看出，电磁波方程的形式和经典物理学的机械波的波动方程完全一致：

$$\nabla^2 u=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

波动方程中的 u 是波函数，表示媒质上各点 $(x，y，z)$ 在 t 时刻的位移，v 是波的传播速度。波动方程是物理学里最基本的方程之一，任何物理量对时间和空间坐标的关系只要满足上式，该物理量就按波的形式传播。



电磁波方程中的 c 是光速，带有下标 r 的希腊字母 ε、μ 分别表示：介质的相对介电常数、介质的相对磁导率，现代物理学认为在真空中，两者的数值都等于 1，在其他介质中都大于 1，换而言之，真空中的光速大于任何介质中的光速。变化的电场在邻近的空间产生磁场，这个变化的磁场在较远的空间又会产生新的电场，电场磁场相互交变产生，由近及远向周围的空间传播出去，形成如下图所示的电磁波。

通过计算，麦克斯韦预言，电磁波的传播速度等于光速，又断言光是一种电磁波，也就是说，光波的波动方程就是电磁波方程。1862 年，麦克斯韦在论文《论物理力线之第三部分 - 分子涡旋理论应用于静电学》中写到：光是某种媒质的横向波动，这种媒质正是产生电磁现象的同一种媒质；1868 年，麦克斯韦在论文《关于光的电磁理论》中明确提出：光是一种按照电磁规律在场内传播的电磁扰动。

科苑快讯

酒精与饥饿

至少在公元 5 世纪之前，人类就开始通过开胃酒来刺激食欲。关于酒精导致饮食过量的普遍解释是自我失控，但是英国伦敦弗朗西斯 · 克里克研究所（F. Crick Institute）的凯恩斯（S. Cains）和同事却认为这是生理机制使然。

在为期 3 天的时间内对小鼠喂以酒精，其摄食量不但增加，而且促进了 AgRP（刺鼠相关蛋白）神经元的活跃，而 AgRP 神经元受到刺激后会引发强烈的饥饿感。这种活跃度水平与禁食或分泌饥饿激素后的水平相当，当小鼠的这些细胞功能受到抑制时进食量则不会增加。

（高凌云编译自 2017 年 2 月 15 日《欧洲核子中心快报》）