趣解费米问题两则

张明谦

（山东省邹平县第一中学 256200）

美国物理教师协会 AAPT（American Association of Physics Teachers）的网站上经常有面向中学生的趣味挑战题，其中有两道费米问题的求解很有意思，值得我们借鉴。

问题一：暗夜烛光——人眼能够看多远？

人眼要在一个晴朗的夜晚能够看到一只燃烧的蜡烛，最远可以离它多远？假设我们所处的区域远离其他任何形式的照明并且是新月时段。

要想回答这个问题我们需要估算三条信息：完全适应黑暗后人眼的敏感度、蜡烛的光输出、人眼收集光线的面积。

在完全黑暗的情况下非常有助于观察，所以我们假定人眼的敏感度接近其物理极限。一个可见光光子的能量约为 2 eV（$E=hc/\lambda$, 1 eV=1.6×10^{-19} J），能够引起视杆细胞反应的能量要小于这个数值，因为人体的热能 kT，T=300 K，大约为 1/30 eV，又因为人眼有上亿个的视杆细胞，一个可见光光子不可能引起视觉因为有太多虚假信号了。所以我们限定人眼敏感度其上限为 100 个可见光光子，下限当然就是一个可见光光子了，取其几何平均值则为 10 个可见光光子。另一方面我们要估算一下眼睛感受到这 10 个可见光光子的时间间隔，我们知道眼睛的视神经的反应时间（视觉暂留）约为 1/20 s，因为电影每秒要拍摄约 20 帧。这就意味着我们能够接收的最小光通量为每秒 200 个可见光光子，其功率约为 400 eV/s 即 6×10^{-17}W。

完全适应黑暗的环境后人眼瞳孔的直径约为 5 mm，则其面积约为 25 mm^2 或 2×10^{-5}m^2，这就是说我们接收的功率密度为：$p=6\times10^{-17}\text{W}\times2\times10^{-5}\text{m}^2=3\times10^{-12}\text{W/m}^2$。

现在我们来估算一下这支蜡烛的光通量。一只蜡烛的光输出大约和一盏 4 W的白炽灯相仿，白炽灯的输出效率非常低约为百分之几，这就是说这支蜡烛或者这只白炽灯泡仅能输出 0.1 W的光子（如果你知道发光强度的单位 candela 的定义，你就明白普通蜡烛的辐射强度为 1/683W/sr。在 12sr 内总量约为 0.2 W，所以我们的结果还是说得过去）。

好了现在就可以来估算能够侦测到蜡烛光的最大距离了。

由距离为 R 的功率密度为 p 得到：

$$p=0.1\text{W}/(4\pi R^2)$$

即

$$R=\sqrt{\frac{0.1\text{W}}{4\pi\times3\times10^{-12}\ \text{W}/\text{m}^2}}=10^5\text{m}=100\text{km}。$$

这可真是够远的，在这个距离上我们需要考虑大气衰减的影响，这会使得观察距离明显缩短（取决于空气的湿度和污染情况）。请注意，在这个距离上我们只能是模糊的朦胧的觉察到烛光的存在，而并不是说可以直接的看到它。

问题二：人车孰重——金门大桥会倒塌？

2017 年是金门大桥的八十周年庆典，届时桥上人满为患拥挤不堪，忧心忡忡的工程师们担心如此众多的民众是否超过金门大桥的承受能力，会不会将大桥的钢塔拉倒呢？

这个问题引发一个思考：我们能否比较一下平时通过金门大桥的汽车的质量密度（单位面积上的质量）和八十周年庆典当天行人的质量密度来判定金门大桥是否会倒塌呢？

在这里，汽车的质量当然是远大于人的质量的，但同时它们也占有更大的面积，我们先分别估算一下

从麦克斯韦方程组到电磁波方程

董广宇

麦克斯韦方程组的威名可谓如雷贯耳，是经典电磁学的最高成就。

先来看看麦克斯韦方程组的样子：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon}=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot \mathrm{d}V$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\int_S(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu I+\varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}=$$

$$\int_S \mu\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S(\mu\boldsymbol{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$$

方程组写成以上形式，需要一个前提：空间中的媒质是各向同性的 (即，媒质中的每一点的物理性质不随方向改变)。

方程组的一式描述了电荷产生电场的高斯定律，二式描述了变化的磁场产生电场的法拉第电磁感应定律，三式描述了磁单极子不存在的高斯磁定律，四式描述了电流和变化的电场产生磁场的麦克斯韦 - 安培环路定律。

有物理意义上的场必定存在物理意义上的源，因此，我们可以发现，麦克斯韦方程组等式的左边是场，右边是源。由于，变化的电场产生磁场，变化的磁场产生电场；又由于，只存在电荷而不存在磁荷 (即不存在磁单极子，或者理解为，电力线是发散的，而磁力线是闭合的，使得具有终始方向的磁感应强度 B 与闭合曲面 S 的积分总为 0)；所以，根据方程组，只要在已知电荷分布和电流分布 (即运动电荷) 的情况下，就可以得到电场和磁场的唯一分布。

在如今物理学的教材中，标准的麦克斯韦方程组都是以上述四个积分形式出现的，不过，方程组的最初形式却并不是这样。麦克斯韦本人当年 (1865 年) 在论文《电磁场动力论》中写下的是 20 个方程，都是分量形式，不是矢量形式；上述的这四个矢量积分形式的方程组是由另一位物理学家赫兹在 1890 年写出的。

一辆汽车在正常行驶和交通拥堵时所占面积。

在这两种情况下，车道的宽度为约 4 m，交通拥堵时相邻车辆间隔约半个车长，车长约 4 m，所以在交通拥堵情况下一辆车所占面积为 4 m×6 m 约 20 m^2，车的质量一般为 2 吨，于是得到其质量密度为：

$$\sigma=M/A=2000\mathrm{kg}/20\mathrm{m}^2=100\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2 。$$

正常行驶时车辆一般留有 2s 的行车间距，这就是说当车辆以每小时 60 英里 (约 30m/s) 的速度行驶时，两车之间驾驶员应留有 60m 的距离，因此正常行驶时每辆车所占面积为：

$$A=4\mathrm{m}\times 60\mathrm{m}=240\ \mathrm{m}^2。$$

约为交通拥堵时的 10 倍

其质量密度为：

$$\sigma=M/A=2000\mathrm{kg}/240\mathrm{m}^2=10\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2 。$$

若在某交通高峰时刻，某一方向交通拥堵，另一方向可正常行驶，则其平均质量密度为 50kg/m^2，卡车的话可能还要再提高至少两倍。

好了，现在我们来估算一下庆典当天行人的质量密度。每平方米能够站多少人呢？当人们拥挤在一起时，每平方米可以站的人数多于 1 人少于 20 人，取其几何平均值为 4 人，每个人质量为 100 kg(典型的美国人的体型标准，不是吗？)，于是得到行人的质量密度为 400 kg/m^2。行人的质量密度至少是正常行驶时汽车质量密度的 40 倍，交通高峰时段的 8 倍，是交通拥堵时段的 4 倍。

如此看来工程师们的担心还是很有道理的。