时空的乐章——引力波百年漫谈（三）

卢昌海

六、从难以置信的弱到不可思议的强

在本节中，我们要做一件顺理成章的事，那就是应用上节得到的引力波四极辐射的功率表达式——即 (5.5) 式，来计算或估算一些具体例子，并得出数值结果，从而使我们对引力波，尤其是它的强弱，有一个比抽象公式更直观的了解。

不过在应用之前，首先要解决一个小问题。

细心的读者想必早已注意到——事实上我们曾提醒过，(5.5) 式及前文中的其他类似公式都采用了光速 $c = 1$ 的特殊单位制，由此带来的显而易见的结果是公式中不出现光速。这种在理论推导时颇为简洁的单位制对具体应用却是不太方便的，因此在应用之前，我们首先要恢复 (5.5) 式中的光速，恢复的手段是所谓的量纲分析 (dimensional analysis)。

具体地说，我们用 $[X]$ 表示物理量或物理常数 X 的量纲，用 M、L 和 T 分别表示质量、长度和时间的量纲，则 (5.5) 式中各项或物理常数的量纲分别为

$$[\mathrm{d}E/\mathrm{d}t] = M L^2 T^{-3}$$
$$[G] = M^{-1} L^3 T^{-2} \tag{6.1}$$
$$[\partial^3 Q_{ij}/\partial t^3] = M L^2 T^{-3}$$

为了让 (5.5) 式两侧的量纲相同，我们在其右侧添加——即乘上光速的 n 次幂 c^n，相应的量纲为 $[c^n] = L^n T^{-n}$。将这些结果代回 (5.5) 式可得量纲方程

$$M L^2 T^{-3} = M L^{7+n} T^{-8-n} \tag{6.2}$$

这方程的唯一解为 $n = -5$，由此得到恢复光速后的辐射功率公式为

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -(G/5c^5)\,(\partial^3 Q_{ij}/\partial t^3)\,(\partial^3 Q^{ij}/\partial t^3) \tag{6.3}$$

有了 (6.3) 式，我们便可计算具体体系的引力波辐射功率了。其中一个最简单而不失现实意义的体系是作圆周运动的质点——或者更确切地说，是相对于背景时空作圆周运动的质点。太阳系内多数行星绕太阳的公转、多数卫星绕行星的公转，乃至绕共同质心作圆周或接近圆周运动的双星等，都可在一定程度上近似为这样的体系。

假设质点的质量为 m，圆周运动半径为 r，则在原点位于圆心、随质点转动的所谓随动坐标系 (x'_1, x'_2, x'_3) 中，可将质点的位置取为 $(r, 0, 0)$，转轴取为 x'_3。相应地，由 (5.3) 式所定义的四极矩为：$Q_{11} = ⅔\, mr^2$，$Q_{22} = Q_{33} = -⅓\, mr^2$，其余分量皆为零。将这一结果变换到与背景时空相“固连”、且与随动坐标系共享原点及转轴的坐标系——称为固定坐标系——中，可得到随时间而变的四极矩，以及：

$$(\partial^3 Q_{ij}/\partial t^3)\,(\partial^3 Q^{ij}/\partial t^3) = 32 m^2 r^4 \omega^6 \tag{6.4}$$

其中 ω 是随动坐标系相对于固定坐标系的转动角速度——也就是质点绕圆心的转动角速度①。将 (6.4) 式代入 (6.3) 式便可得到这一体系的引力波辐射功率为

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -(32G/5c^5)\, m^2 r^4 \omega^6 \tag{6.5}$$

(6.5) 式中所有的物理量：质量、半径、角速度都是能直接测量的，从而可付诸计算。我们以太阳系最大的行星——木星——绕太阳的公转为例，来计算一下这种体系的引力波辐射功率。为此，我们首先列出与这一计算有关的木星及其轨道参数在国际单位制下的数值（为行文便利起见，在此处及后文的数值计算中，单位往往被略去，感兴趣的读者可依照国际单位制自行补全）：

$$m = 1.9 \times 10^{27}$$

$$r = 7.8 \times 10^{11} \tag{6.6}$$

$$\omega = 1.68 \times 10^{-8}$$

其中轨道半径取为了椭圆轨道的半长径。将这些数值，外加国际单位制下的物理常数 G 和 c 的数值 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 和 $c = 3 \times 10^8$，代入 (6.5) 式便可得到：

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -5.3 \times 10^3 \tag{6.7}$$

由于国际单位制下的功率单位是瓦 (watt)，因此上式给出的是一个小得可怜的功率： 5.3×10^3 瓦或 5.3 千瓦。太阳系最大的行星，一个质量达 1.9 亿亿亿吨的庞然大物，以每小时 46800 千米的巨大速度绕太阳公转所发射的引力波的辐射功率居然是 5.3 千瓦这么一个“家常”数字，仅相当于几台家用电器的能耗，这远远不是“九牛一毛”可以形容其小的。靠这样的辐射功率，哪怕使木星的轨道半径减小一毫米也需要 10 亿年以上的时间 (感兴趣的读者可自行核验一下)！

木星尚且如此，更小的体系的引力波辐射功率自然就更微不足道了。事实也正是如此，比如水星绕太阳公转的引力波辐射功率约为几十瓦，只相当于几盏灯泡 —— 恐怕还是节能灯泡 —— 的能耗。而月球绕地球公转的引力波辐射功率更是“迷你”，仅为几微瓦。在一个天文体系中涉及如此“微观”的功率，这在引力波以外的领域是不易见到的，引力波的微弱在这一例子中可说是体现得淋漓尽致。

这些例子印证了第三节末尾提到的，庞加莱所寄望的用引力波造成的能量损失来解释水星近日点的进动是完全错误的。事实上，太阳系范围内的任何天体运动所产生的引力波都绝非今天的观测技术所能企及，从而也不能用来解释任何观测现象。

不过，这一切只不过说明我们这个从很多其他角度看起来相当浩瀚的太阳系对引力波来说实在不是一个大舞台，而并不意味着引力波总是微弱的。为了说明这一点，让我们把注意力转向某些引力波辐射功率极为可观的体系，看看引力波能强大到什么程度。

不过为偷懒起见，同时也为展示物理学家们不拘一格的计算手段，我们将不再重复上面这种“死算”，而要采用一些近似手段。当然，我们其实一直就在用近似手段，首先是弱场近似，然后是在多极展开中只取四极辐射，现在我们要在近似之路上再多走一步。不过，多走的这步跟前面几步有一个很大的不同： 前面的近似都有一定的适用条件，只要满足条件，误差可以控制得很小，如今要多走的这步则不然，名曰近似，实为估算 —— 数量级意义上的估算。在这种估算中，我们不在乎任何数量级为 1 的常数 —— 比如 (6.3) 式中的系数 1/5，也不在乎诸如质量分布、 速度分布之类的细节，而代之以某种平均。既然分布由平均取代，则积分就可变为乘法，导数则可化为除法，因此 (5.3) 式给出的四极矩 Q_{ij} 可以近似为 MR^2 (其中 M 是体系的总质量，R 是线度)； 而 (6.3) 式中的三阶导数 $\partial^3 Q_{ij}/\partial t^3$ 则可近似为 MR^2/T^3 (其中 T 是体系中物质运动的典型周期)。

除这些简单数学外，我们还要用一点简单物理，那就是： 能辐射强引力波的体系必然是以引力为主导的体系，这种体系中物质运动的典型速度乃是引力束缚下的轨道运动速度 $v \sim (GM/R)^{1/2}$，典型周期则是 $T \sim R/v \sim (R^3/GM)^{1/2}$。

利用这些结果，(6.3) 式可在数量级意义上被估算为 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t \sim -(c^5/G)\,(GM/Rc^2)^5$。这里我们将等号 “=” 换成了表示数量级估算的 “~”，并且略去了 1/5 一类的数值系数。最后，我们注意到 c^5/G 是一个量纲为功率的常数，我们用 L_0 来表示它。L_0 的数值约为 10^{52}，是一个极为惊人的功率，相当于每秒钟消耗 10 万个太阳质量 (请注意，“每秒钟消耗 10 万个太阳质量”不是太阳光度的 10 万倍，而是每秒钟将 10 万个太阳的总质量全部转化为能量)。利用所有这些结果，(6.3) 式可最终简化为

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t \sim -(GM/Rc^2)^5\, L_0 \tag{6.8}$$

对广义相对论或黑洞物理学有一定了解的读者也许注意到了，(6.8) 式中的 GM/Rc^2 乃是所考虑的体系的施瓦西半径 (Schwarzschild radius) 与真实线度之比②。对普通的体系来说，这个比值是非常小的，比如对太阳来说，施瓦西半径约为 3 千米，真实线度却在 100 万千米的量级，两者之比为百万分之一的量级。对木星的公转来说，施瓦西半径是木星和太阳这一体系的施瓦西半径，实际上也就是太阳的施瓦西半径 (因为木星质量只有太阳质量的千分之一，可以忽略)，而

真实线度乃是木星轨道的线度，在 10 亿千米的量级，两者之比只有十亿分之一的量级。更何况，出现在公式中的乃是这一比值的 5 次方，更是小之又小。这是引力波辐射功率通常极其微小的重要原因。

那么什么样的体系可能会有辐射功率极为可观的引力波呢？从 (6.8) 式中立刻可以看出是强引力场天体。强引力场天体的基本特点就是施瓦西半径不比真实线度小太多，从而 GM/Rc^2 是一个不太小的比值，由于 (6.8) 式中的 L_0 是一个极为惊人的功率，因此一旦 GM/Rc^2 不太小，引力波的辐射功率便会走向另一个极端，变得极为可观。

比如高速转动的中子星 (neutron star)——这种中子星通常发射在我们看来脉冲式的电磁辐射 (其实只是由于电磁辐射周期性地扫过我们的方向)，因而也被称为脉冲星 (pulsar)——就是强引力场天体的典型例子。这种天体是大质量恒星的几类主要 “ 尸体 ” 之一，平均物质密度高达每立方米数百万亿吨，相应的半径只比施瓦西半径大一个数量级左右，即 GM/Rc^2 约为 10^{-1}，由此对应的引力波辐射功率高达 10^{47} 瓦 (一千万亿亿亿亿亿瓦)，或相当于每秒钟辐射掉一个太阳质量。这样的辐射功率相当于太阳光度的一万亿亿倍，或相当于银河系中所有星星辐射功率总和的 100 亿倍。由于可观测宇宙中的星系总数在 1000 亿的量级，而银河系在星系中属于较大的，因此 10^{47} 瓦的引力波辐射功率已能跟可观测宇宙中所有星星辐射功率的总和相提并论了。

有些读者或许还记得，我们在本系列开篇谈及美国激光干涉引力波天文台首次探测到的引力波时曾提到过，那次探测到的引力波源自一对黑洞的合并，其最大的引力波辐射功率甚至超过了可观测宇宙中所有星星辐射功率的总和。我们上面的估算可说是印证了这一陈述，因为与中子星相比，黑洞是更极端的强引力场天体，相应地，涉及黑洞的某些过程所辐射的引力波也更可观，既然前者的辐射功率已能跟可观测宇宙中所有星星辐射功率的总和相提并论，后者超过可观测宇宙中所有星星辐射功率的总和也就并不奇怪了。

在经受了这么多公式和数字的 “ 折磨 ” 后，从环环相扣的理论推演中初步印证出了科学新闻中的描述，是不是有一点小小的成就感？

不过，辐射功率如此惊人的引力波就算出现了也不可能持久，而注定只是昙花一现的瞬态过程。甚至，这种辐射其实未必真能出现在我们所提到的中子星这一例子之中。这是因为我们的估算不仅粗略，而且还忽略了四极辐射的一个重要特点，即对称性高的运动——比如球对称的脉动或轴对称的转动——根本不会有四极辐射。由此造成的缺陷是：(6.8) 式有一个隐含的先决条件，那就是体系必须处于高度非对称的运动中。对单个的中子星来说，也许只有在其形成过程中变动最剧烈的爆炸或坍塌瞬间能出现较大程度的非对称运动，使上述估算勉强有一定的适用性。不过上述估算并非只适用于单个的中子星，若转而考虑中子双星的合并，则高度非对称的运动不难出现，而且在合并过程的末期整个体系的 GM/Rc^2 与单个中子星相似，约为 10^{-1}，从而确实能在一个极短的时间内产生如前所述的惊人的引力波辐射功率。对于那样的过程，以及更惊人的黑洞的合并，我们在后文中会有更多介绍，这里就不赘述了。

除上面这种辐射功率惊人却至多只能昙花一现的引力波外，中子星也可以相对稳定地辐射出功率很强的引力波。不过为显示这一点，我们需对 (6.8) 式略作修正，以扩大其适用范围。

我们刚才提到，(6.8) 式忽略了四极辐射的一个重要特点，即对称性高的运动，比如球对称的脉动或轴对称的转动，根本不会有四极辐射。因此修正 (6.8) 式的关键就在于将对称性高的运动排除掉。为此我们注意到，出现在 (6.3) 式中的四极矩张量乃是体系的转动惯量张量 (moment of inertia tensor) 的无迹 (traceless) 形式③。利用这一特点，我们可以用转动惯量张量来表述和排除对称性高的运动。具体地说，转动惯量张量，乃至一切二阶对称张量能在一个被称为主轴坐标系 (principal axes coordinates) 的特殊坐标系中被对角化，这种坐标系的三个相互垂直的坐标轴——姑记为 x，y，z——称为主轴 (principal axis)，相应的转动惯量张量的对角分量——姑记为 I_x，I_y，I_z——称为主惯量 (principal moment of inertia)。我们

考虑一个相对简单却不失现实意义的情形：中子星绕主轴 z 转动。在这种情形下，四极矩张量的 z 分量是不变的，从而不会对四极辐射产生贡献，不仅如此，x-y 平面上的两个主惯量 I_x 和 I_y 若相等，则相应的转动是轴对称的转动，四极矩也不会随时间变化，从而也不会对四极辐射产生贡献。这些正是需从 (6.8) 式中排除掉的所谓对称性高的运动。由此我们可将产生四极辐射的条件表述为：x-y 平面上的主惯量 I_x 和 I_y 不相等。描述这种不相等的一个方便的参数是转动惯量张量的所谓赤道椭率 (equatorial ellipticity)，记作 e，定义为 $e = (I_x-I_y)/(I_x + I_y)$。可以证明，由 (6.3) 式给出的引力波辐射功率正比于 e^2——这从 (6.3) 式是 Q_{ij} 的二次型就不难看出，效仿前文针对圆周运动质点的计算步骤亦不难给出证明。相应地，(6.8) 式则可通过添加 e^2 而得到一个相当有效的修正，即：

$$dE/dt \sim -(GM/Rc^2)^5\, e^2\, L_0 \qquad (6.9)$$

有了这个修正，则中子星的引力波辐射功率就不是 10^{47} 瓦，而是 $10^{47}e^2$ 瓦。对于中子星这种强引力场天体来说，运动偏离对称的幅度通常是很小的，e 的典型量级只有 10^{-4} 左右，相应的引力波辐射功率则约为 10^{39} 瓦，或相当于几年内辐射掉一个太阳质量。当然，10^{39} 瓦虽比 10^{47} 瓦小得多 (也合理得多)，却依然足以在几年内耗掉中子星的转动能量，从而造成其转速的显著减小，以及 e 的减小。当转速或 e 减小时，引力波的辐射功率及对自转的减速作用也将减小，并逐渐逊色于其他因素——比如磁偶极辐射等，细节则视具体情形而定。此外，当转速减小到一定程度后，(6.9) 式这种与转速无关的粗略估算也将不再适用④，而需重新改用 (6.3) 式来计算。由于本节只是意在提供一些直观了解，对那样的细节就不展开了。

计算引力波辐射功率的例子还可举出许多，其中包括人工物体产生的引力波。当然，结果将是可以预料的微乎其微，比如线度数十米、质量数百吨，对人工物体而言相当庞大的金属圆柱以每秒十余圈的速度绕质心转动所产生的引力波辐射功率仅为一百万亿亿亿分之一 (10^{-30}) 瓦的量级。感兴趣的读者可自己找几个例子计算或估算一下，以加深理解。通过所有这些例子，我们对引力波的强弱可算是有了大致了解，一言以蔽之的话，引力波既可以难以置信的弱，也能够不可思议的强，除某些实际上不可能严格满足的高度对称的运动外，它的存在极其普遍，倘能探测到，无疑将为物理学和天文学开辟一个广阔而缤纷的新领域。

不过在转入引力波的探测之前，我们还有一段有趣的插曲要介绍。这段插曲 —— 我向读者保证 —— 将完全不带数学，从而可以喘口气。

---

① (6.4) 式的推导思路是直接了当的：只要用随动坐标系与固定坐标系之间的变换矩阵 (即绕 x'_3 轴的转动矩阵) 对作为二阶张量的随动坐标系中的四极矩 Q_{ij} 作变换，便可得到固定坐标系中的“随时间而变的四极矩”(之所以随时间而变，是因为随动坐标系与固定坐标系之间的转角，也就是变换矩阵中的角度参数，是随时间增加的)；对之求导、求和便可得到 (6.4) 式。具体的推导并不复杂，感兴趣的读者可以自己试试。

② 对于不熟悉施瓦西半径的读者，我们略作解释：一个天体的施瓦西半径乃是它作为非转动、不带电的天体被压缩成黑洞时的视界半径 —— 确切地说是视界周长除以 2π 意义上的等效半径，表达式为 $2GM/c^2$ (其中的 2 在数量级估算中可以忽略)。之所以强调非转动、不带电，是因为否则的话会有超出我们估算所需的额外复杂性。

③ 我们这里采用的转动惯量张量的定义为 $I_{ij} = \int d^3x'\, \rho(x')\, x'_i x'_j$。与 (5.3) 式所定义的四极矩张量 Q_{ij} 相比较，不难看出后者是前者的无迹形式 —— 即满足 $Q^i{}_i = 0$。

④ 因为推导 (6.9) 所用的典型速度及典型周期是引力束缚所允许的最剧烈的运动 (具体到中子星上，则是最快的转速)，因而当转速减小到一定程度后，这种估算将成为显著的高估而不再适用。