时空的乐章——引力波百年漫谈（二）

卢昌海

三、算不上先驱的先驱

在广义相对论之前的物理学中，时空宛如一个舞台，物理过程像戏剧一样千变万化，舞台却是不变的。广义相对论首次将时空变成了戏剧的一部分，变成了一个动力学概念，时空不再是不变的了。另一方面，在物理学上，几乎所有可变的东西都可以有波动式的变化，时空既然不再是不变的，就也没理由例外，从这个意义上讲，引力波在概念层面上的存在几乎是水到渠成，甚至显而易见了。

在更具体的层面上，引力波的存在还可以这样来理解，那就是广义相对论既然解决了牛顿万有引力定律与狭义相对论相互冲突的问题，那么引力自然不会再像牛顿万有引力定律所隐含的那样瞬时传播了。而引力既然不再瞬时传播，就意味着引力源的运动对远处的影响只能逐渐传播开去，这“逐渐传播”的典型形式无疑就是波动。这种相互作用的非瞬时传播与波动之间的密切关联物理学家们并不陌生，因为电磁波就是这样一种波动，一种与电磁相互作用的非瞬时传播有着密切关联的波动。

不过，引力的非瞬时传播虽然是由广义相对论所确立的，相互作用非瞬时传播的概念却并非始于广义相对论，甚至也并非始于狭义相对论——虽然后者对这一概念取得基础地位具有决定性的影响。事实上，比狭义相对论早得多就有科学家猜测过引力的非瞬时传播，并且作出过跟引力波的存在不无异曲同工之处的猜测。

比如著名法国科学家拉普拉斯 (P. de Laplace) 早在 1776 年就考虑过修改牛顿万有引力定律的若干可能性，其中之一就是放弃引力的瞬时传播。假如引力的传播不是瞬时的，会有什么可观测效应呢？拉普拉斯以地球对月球的引力为例作了具体分析。他首先假定引力是通过物体之间交换某种微小粒子所产生的，方向沿那些微小粒子的运动方向。对于地球与月球间的引力而言，如果引力的传播是瞬时的，产生引力的那种微小粒子的发射方向——也就是引力的方向——无疑就是沿两者的连线方向，从而跟牛顿万有引力定律相一致。但假如引力的传播不是瞬时的，那种微小粒子从地球运动到月球就需要花费时间，而在这段时间内，月球本身会沿着公转轨道往前运动一段距离，因此为了使那种微小粒子能与月球相遇，它们的发射方向必须稍稍偏往月球的运动方向一点。很明显，这种发射方向上的偏角意味着地球对月球的引力将不再沿两者的连线方向，而是——相对于月球而言——有一个沿切向往后拖拽的分量(感兴趣的读者可以画一幅示意图论证这一点)。由于这种拖拽效应的存在，月球的轨道将会慢慢“蜕化”，轨道高度将会逐渐降低，月球的最终命运——倘不考虑任何其他因素的话——将会是坠落到地球上。

拉普拉斯以引力的非瞬时传播为前提所预言的月球轨道的“蜕化”在定性上跟引力波造成的效应是相同的。不过预言虽然相同，拉普拉斯却并没有提出引力波的概念。按照现代的思路，月球轨道的“蜕化”意味着轨道能量的损失，只要问一句“损失的轨道能量到哪里去了”，引力波的概念就几乎必然会被引出来。可惜的是，今天看来天经地义的推理在拉普拉斯时代却并非如此，原因很简单：能量守恒定律在拉普拉斯时代尚不存在。能量及能量守恒定律的基础

地位容易给人一个错觉，以为这两者都是渊源流长的概念。但其实，它们的历史并不悠久，稍具现代意义的能量概念在拉普拉斯时代尚处于形成之中，许多形式的能量尚未被认识，能量守恒的观念也尚未得到确立。因此对拉普拉斯来说，“损失的轨道能量到哪里去了”的问题并不显而易见，更不会引发他往引力波的方向去猜测。也正因为如此，他的猜测只能被称为“跟引力波的存在不无异曲同工之处的猜测”，这种猜测相对于引力波研究来说只在很边缘的意义上具有先驱性。

等到英国物理学家麦克斯韦 (J. Maxwell) 建立了完整的经典电磁理论以及爱因斯坦提出了狭义相对论之后，有关引力波的猜测才真正问世了。这种猜测有两个主要诱因：一个是牛顿万有引力定律与描述静电相互作用的库仑定律 (Coulomb’s Law) 具有表观上的相似性，这种相似性启示人们猜测相对论性的引力理论与完整的经典电磁理论会有一定的相似性，从而会像电磁理论具有电磁波一样具有引力波。另一个诱因则是前面提到过的相互作用的非瞬时传播与波动之间的密切关联，狭义相对论所确立的光速上限对这一诱因无疑是一种加强。在这些诱因的“引诱”下，法国科学家庞加莱 (H. Poincaré) 早在 1905 年 6 月——比狭义相对论的发表还早——就对引力波的存在做出了明确猜测。这位在爱因斯坦之前就对狭义相对论的很多结果有过预期的著名科学家在一篇题为“电子的动力学”(Sur la dynamique de l’électron) 的论文中不仅提出了引力场会像电磁场那样产生以光速传播的波，而且将这种波明确称为了引力波。稍后，庞加莱还进一步猜测引力波造成的能量损失有可能解释水星近日点进动 (perihelion precession of Mercury) 的传统计算与观测值之间的偏差。

不过当时距离广义相对论的创立还有 10 年，庞加莱对符合相对论要求的引力理论的预期只是概念性的，所提出的引力波也是概念性的，除猜对了它的传播速度是光速外，在技术层面上对引力波的其他了解近乎于零，所猜测的引力波对水星近日点进动的影响也是完全错误的。从这个意义上讲，庞加莱这位提出了引力波概念及名称的先驱也是要打折扣的，姑称为“算不上先驱的先驱”吧。

四、广义相对论的弱场近似

在引力波的研究中，真正称得上先驱及提出者的只有一个人，那就是爱因斯坦本人。

爱因斯坦的研究风格具有极强的系统性，在创立了广义相对论之后仅仅两年左右的时间，他就再接再厉地开辟了两个全新的分支领域：一个是相对论宇宙学，另一个就是引力波研究。爱因斯坦开辟的这两个领域后来都有了一些戏剧性的曲折，比如相对论宇宙学的发展在不久之后就使爱因斯坦所青睐的静态宇宙模型遭到了观测否决，而引力波的研究在爱因斯坦有生之年虽无观测数据，爱因斯坦自己的观点却几经变化。我们将在后文中陆续介绍爱因斯坦的观点变化，在本节中，让我们先上点“干货”，介绍一下广义相对论的弱场近似 (weak field approximation)，对于引力波研究来说这是最便利的切入点，也是爱因斯坦研究引力波时最先考虑的情形。

有读者也许会问：讨论电磁波时从来也不需要弱场近似，为什么引力波研究要以弱场近似为切入点呢？这是因为电磁理论——确切地说是麦克斯韦的经典电磁理论——是一个线性理论，这种理论的基本特点是处理的难度与场的强弱无关，从而没必要对后者作出限制。但广义相对论不同，它是一个非线性理论，这种理论的一个基本特点是场具有所谓的自相互作用 (self-interaction)，即场的产生不仅取决于源，而且还取决于它自身。这种自相互作用的存在使非线性理论的处理比线性理论困难得多，而且场越强，自相互作用往往越显著，处理的难度也就越大。那么非线性理论——或者具体地说，广义相对论这一非线性理论——该如何处理呢？一般来说，处理的手段有三类：一类是寻找特殊解，这类手段通常靠特定的对称性来简化问题，适用面比较小，但往往可以得到精确而解析的结果；另一类是数值计算，这类手段显著依赖于计算工具，在早期研究中基本缺席，在计算机技术日益发展的今天却有着越来越宽广的应用领域；第三类则是线性近似，这类手段的适用条件是非线性效应可以忽略，只要这一条件得到满足，

它的适用面就是普遍的，不依赖于对称性，同时却往往可以得到解析结果。弱场近似下的引力波研究采用的就是第三类手段，因为弱场的自相互作用可以忽略，从而广义相对论可以近似为线性理论。

关于广义相对论的弱场近似，首先要问的是：什么是弱场？由于广义相对论将引力归结为时空的弯曲，而没有引力的时空是由闵科夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$ 所描述的平直时空——也称为闵科夫斯基时空。因此所谓弱场显然是指时空偏离闵科夫斯基时空的幅度很小的情形。用数学语言来表示，广义相对论的弱场指的是形如

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{4.1}$$

的度规所表示的引力场——其中括号里的 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 表示时空偏离闵科夫斯基时空的幅度很小。

将 (4.1) 式代入爱因斯坦场方程 (2.9) 式，并且只保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，可以得到

$$\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\nu - \partial_\lambda\partial_\nu h^\lambda{}_\mu + \partial_\mu\partial_\nu h = -16\pi G(T_{\mu\nu} - ½\eta_{\mu\nu}T) \tag{4.2}$$

其中 h 是 $h_{\mu\nu}$ 的缩并，T 是 $T_{\mu\nu}$ 的缩并。需要说明的是，(4.2) 式中 $h_{\mu\nu}$ 和 $T_{\mu\nu}$ 的所有指标都是用闵科夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$ 来升降的，因为否则就会引进 $h_{\mu\nu}$ 的非线性项。

(4.2) 式虽然是线性的，却依然有相当的复杂性。幸运的是，我们还有一个“杀手锏”尚未使用，那就是广义相对论所具有的广义协变性。广义协变性使我们可以对 4 个时空坐标进行任意变换，而在那样的变换下，广义相对论中的度规、联络等都将发生相应的变化。利用这种变化，我们可以选择特殊的坐标，使得度规、联络等具有最易于处理的形式，这是研究广义相对论问题的重要技巧。熟悉电磁理论的读者也许看出来了，广义相对论所具有的广义协变性类似于电磁理论中的规范不变性 (gauge invariance)，对时空坐标的任意变换类似于电磁理论中的规范变换 (gauge transformation)，而由此带来的对度规、联络等的选择则相当于在电磁理论中选择规范条件 (gauge condition)。所不同的是，电磁理论中的规范变换只涉及一个任意函数，相应的规范条件也只有一个，而广义相对论中的坐标变换涉及 4 个任意函数，从而可以导致 4 个类似的条件——称为“坐标条件”(coordinate conditions)。

坐标条件的选择不是唯一的，就像电磁理论中规范条件的选择不是唯一的。爱因斯坦在早年的研究中——包括理论框架完成之前的阶段里——往往只采用一个坐标条件，即 $g = -1$ (其中 g 是度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式)。满足这一条件的坐标被称为“幺模坐标”(unimodular coordinates)。不过当他对弱场近似进行更系统的研究时，很快发现幺模坐标不适合研究引力波，因而自 1916 年 6 月发表引力波研究的第一篇论文“引力场方程的近似积分”(Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation) 开始，转而采用了荷兰物理学家德西特 (Willem de Sitter) 提出的一组坐标条件：$\partial^\mu(h_{\mu\nu} - ½\eta_{\mu\nu}h) = 0$。这组条件共有 4 个，从而充分利用了广义协变性带来的便利，满足这组条件的坐标被称为“各向同性坐标”(isotropic coordinates)。

利用各向同性坐标，爱因斯坦于 1918 年给出了有关弱场近似下引力波的若干重要结果。不过时隔一个世纪，我们已没有必要重复爱因斯坦的选择，而将采用一种更受现代研究者青睐的坐标条件：调和坐标条件 (harmonic coordinate conditions，也称为“谐和坐标条件”)。用数学语言来表示，调和坐标条件指的是：

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

满足这组总计 4 个条件的坐标则被称为“调和坐标”(harmonic coordinates，也称为“谐和坐标”)。

调和坐标是 20 世纪 20 年代由比利时数学家德唐德 (T. de Donder) 和匈牙利物理学家兰佐斯 (C. Lanczos) 彼此独立地提出的。调和坐标条件作为一个坐标条件，本身并不受弱场近似的限制 (这是它优于德西特和爱因斯坦针对弱场近似所采用的各向同性坐标的地方)，但我们讨论的既然是弱场近似，则对调和坐标条件也需要作一个弱场近似，只保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项。不难证明，这种近似下的调和坐标条件 (4.3) 可以表述为：

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = ½\partial_\nu h \tag{4.4}$$

细心的读者也许注意到了，(4.4) 式跟各向同性坐标所满足的条件是完全相同的，因此调和坐标与各向同性

坐标在弱场近似下是相同的 (这也说明我们对弱场近似的处理跟爱因斯坦原始论文的处理是殊途同归的)。不过这种相同只限于弱场近似， 普遍情形下的调和坐标是一种不同的坐标。

利用 (4.4) 式可以很容易地证明 —— 感兴趣的读者不妨自己试试 ——(4.2) 式左侧除第一项外的其他三项相互抵消。 由此我们得到一个高度简化了的、 很漂亮的广义相对论弱场近似：

$$\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -16\pi G(T_{\mu\nu} - ½\eta_{\mu\nu}T) \qquad (4.5)$$

这一近似之所以漂亮， 是因为——读者想必认出来了——它正是所谓的波动方程 (wave equation)。 这个波动方程所描述的是一种以物质——具体地说是 $T_{\mu\nu}-½\eta_{\mu\nu}T$——为源， 以时空——具体地说是时空偏离平直的程度 $h_{\mu\nu}$——为波幅的波动。 不仅如此， 我们还可以立刻看出这种波动的一个重要特点， 那就是传播速度是光速。

如果说此前有关引力波的一切都是猜测， 那么波动方程的出现改变了事情的性质。 因为波动方程是波动的理论基础， 蕴含着它的定量属性， 也是定量验证的重要依据。 对一般的物理体系来说， 波动方程既然出现了， 波的存在就不言而喻了， 但我们将会看到，引力波跟一般的波相比有一些概念上的微妙性，一度甚至妨碍了爱因斯坦本人对它的理解和接受。

五、单极、 偶极和四极辐射

波动方程的解是物理学家们非常熟悉的， 在数学上有所谓推迟解 (retarded solution) 和超前解 (advanced solution) 之分， 物理上采用的是推迟解——也称为推迟势 (retarded potential)。 对于弱场近似下的引力波动方程 (4.5) 式来说， 推迟解为：

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t) = 4G \int d^3x' \,\overline{T}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}', t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|)/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \qquad (5.1)$$

其中 $\overline{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - ½\eta_{\mu\nu}T$ 是对 (4.5) 式右端所作的符号简化 (这种类型的符号简化在广义相对论中很常见，所表示的是对一个二阶张量的迹的逆转)，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 分别为场和源的三维空间坐标， $d^3\boldsymbol{x}'$ 是对源空间坐标的积分， $t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ 是所谓的推迟时间 (retarded time)——其实是比 t 更早而不是更“推迟”的时间，因推迟解本身所描述的场晚于源的“推迟”效应而得名。

除 (5.1) 式外， 由于 (4.5) 式是线性方程， 相应的齐次方程 (homogeneous equation)——即源 $T_{\mu\nu}$ 为零的方程——的解也可叠加到推迟解上， 从而得到 (5.1) 式的通解。 各种特解——比如平面波解、 柱面波解，或满足特定初始及边界条件的解，等等——皆可视为通解的特例。

对于波——尤其是像电磁波和引力波这样源自基础理论的波——来说， 一个很重要的性质是它的独立分量数目或所谓的物理自由度 (physical degrees of freedom)。 具体到引力波上， 由于 $h_{\mu\nu}$ 是对称张量，从表观上讲有 10 个分量。 但这 10 个分量显然不是独立的， 因为总计有 4 个方程的谐和坐标条件 (4.4) 式可消去 4 个分量， 从而只剩下 6 个。 这 6 个分量是独立的吗？ 依然不是， 因为谐和坐标条件并不足以完全确定坐标， 我们还可对 x^μ 作形如 $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$ 的额外坐标变换， 在这种变换下 $h_{\mu\nu}$ 将变换为 $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \partial_\mu\varepsilon_\nu - \partial_\nu\varepsilon_\mu$。 不难证明， 只要 ε^μ 满足 $\partial^\lambda\partial_\lambda\varepsilon^\mu = 0$， 谐和坐标条件就依然成立， 因此这确实是谐和坐标条件已经满足的情形下依然允许的额外坐标变换， 利用这种变换——总计也有 4 个方程——可进一步消去 4 个独立分量， 最终只剩下两个独立分量， 这才是引力波的独立分量——也称为引力波的偏振或极化 (polarization)。

进一步的分析还表明， 引力波的这两个独立分量和电磁波的独立分量一样都是横波分量——即都是垂直于波矢方向的分量， 而且波的振幅是“无迹” (traceless) 的， 即 $h^\mu{}_\mu = 0$， 使这些特征成立的坐标也因此而被称为横向无迹坐标 (transverse-traceless coordinates)， 简称 TT 坐标。 可以证明， 横向无迹坐标恰好是自由漂浮观测者所用的坐标。 另外值得一提的是， 引力波的这两个横波分量在以波矢为轴的空间转动下按两倍于转角的方式转动 (转动方向则彼此相反)， 因而具有螺旋度 (helicity) ±2， 人们通常所说的引力子 (graviton， 即所谓引力场的量子) 是自旋 2 的无质量粒子， 指的就是这一结果。 不过要注意的是， 这些概念都是在闵科夫斯基度规下定义的， 与我们所讨论的弱场近似一脉相承， 在一般

的广义相对论中却并无明确定义，因此将广义相对论本身笼统地视为自旋 2 的无质量场的理论是不妥的——起码是有争议的。

推迟解 (5.1) 式虽是弱场近似的产物，对一般的源分布来说依然是相当复杂的，具体计算时往往还需采取进一步的近似，其中一种典型的近似手段是所谓的多极展开 (multipole expansion)。这种手段的一个重要优点是：在源——即物质分布——的尺度远小于引力波的波长 (这被称为低速近似或非相对论近似)，并且场点离源的距离远大于引力波的波长 (这被称为远场近似) 的情形下，多极展开由最低阶——即 " 极 " 数最少——的项所主导，其他——即 " 极 " 数更多——的项皆可忽略，从而能极大地降低计算的复杂性。

具体地说，在多极展开下，选用横向无迹坐标，(5.1) 式的主导项是所谓的 " 四极辐射 " (quadrupole radiation)。由于横向无迹坐标下引力波的两个独立分量——即横波分量——都是空间分量，因此我们只需给出 $h_{\mu\nu}$ 的空间部分 h_{ij} 即可，其结果为：

$$h_{ij}(\mathbf{x}, t) = (2G/r)\, \partial^2 Q_{ij}/\partial t^2 \qquad (5.2)$$

其中 r 是场点 $\boldsymbol{x}$ 离源的距离 (在所考虑的远场近似下源的尺度远小于场点离源的距离，因此可以忽略源的不同部分与场点距离的差别)，Q_{ij} 是源的四极矩，定义为：

$$Q_{ij} = \int d^3x' \rho(\boldsymbol{x}')\, (x'_i x'_j - ⅓|\boldsymbol{x}'|^2 \delta_{ij}) \qquad (5.3)$$

其中 ρ 是源的质量密度。这里需要说明的是，为表述简洁起见，我们自此处开始将略去时间变量，(5.2) 式的右侧和 (5.3) 式，以及后文中任何与源有关的计算，其实都是在推迟时刻 $t-r$ 计算的，这是 (5.1) 式或者说引力波的传播速度为光速的直接要求。另外，(5.2) 式只包含了来自物质质量密度的贡献，这是低速近似或非相对论近似的结果。

引力波多极展开中的最低阶项为四极辐射，这是一个很独特的结果，比如跟电磁波就完全不同，因为后者具有所谓的偶极辐射 (dipole radiation)。两种表面上看起来颇为相似——比如万有引力定律与库仑定律都是平方反比律，波动方程更是具有相同形式——的理论在这方面为何会如此不同，引力波为何没有偶极辐射呢？这是由守恒定律所决定的。我们知道，偶极矩的定义为 $P_i = \int d^3x' \rho(x')\, x'_i$，对电磁理论来说，$\rho$ 是电荷密度，上述偶极矩对时间的各阶导数可以是非零的，从而可以有偶极辐射。但引力理论的情况完全不同，对它来说 ρ 是质量密度，因而偶极矩 P_i 正比于源的质心位置，其对时间的一阶导数正比于源的总动量，在所考虑的近似下是一个守恒量。这就意味着其对时间的二阶导数——这是辐射场及辐射能流所包含的导数——恒为零，这是引力波不存在偶极辐射的根本原因。

更一般地说，在单极、偶极和四极这几种最低阶的多极展开项中，单极辐射出现的条件是源的总量不守恒，由于电荷和能量都是守恒的，因此电磁理论和引力理论都没有单极辐射；偶极辐射出现的条件则是源的 " 荷动量 " (charge-momentum) 不守恒，由于电磁理论的 " 荷动量 " 确实不守恒，因此电磁理论有偶极辐射，而引力理论的 " 荷动量 " 乃是普通的动量，是守恒的，因此引力理论没有偶极辐射。

引力波多极展开的最低阶是四极辐射这一特点也使得引力波更为微弱，因为在所考虑的近似条件下辐射的 " 极 " 数越多，辐射就越微弱 (感兴趣的读者可以定性地估计一下辐射强度与辐射的 " 极 " 数之间的关系)。当然，这只是使得引力辐射微弱的原因之一，而且并非最主要的原因，最主要的原因是引力相互作用本身是目前已知的四种基本相互作用中最弱的，比另三种相互作用——强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用——都弱几十个数量级。当然，基本相互作用之间的这种比较是以微观世界为标准进行的，从而不能一概而论。比如引力本身在天体尺度上就绝不微弱，而引力波虽然在普通的天体尺度上依然微弱，却也并非总是微弱，在特殊的强引力场天体的特殊运动中可以变得很强，甚至强到不可思议，这些我们在后文中将会看到。

引力波多极展开的最低阶是四极辐射还有一个微妙的 " 副作用 "，那就是在历史上曾使一些物理学家对引力波的存在做出过错误判断。比如继庞加莱之后引力波研究中的另一位 " 算不上先驱的先驱 "，德国物理学家亚伯拉罕 (M. Abraham) 曾于 1912 年提出了自己的引力理论，并正确地意识到了引力波不存在偶极辐射 (如前所述，这一特点源自守恒定律，从而

可以不依赖于广义相对论而得到)。但也许是太看重引力波与电磁波的相似性，亚伯拉罕从不存在偶极辐射这一特点中鲁莽地舍弃了引力波的存在(当然，由于他的引力理论是错误的，即便没有舍弃引力波的存在，也难以得到正确的定量结果)。无独有偶，爱因斯坦本人在研究引力波之初也曾对引力波的存在作出过有可能是否定的判断。在 1916 年 2 月 19 日给德国同事施瓦茨 (K. Schwarzschild) 的一封信里，爱因斯坦表示在得到了完整的广义相对论之后，自己已用不同的方法处理了牛顿近似，得出的结论是“不存在与光波相类似的引力波”(there are no gravitational waves analogous to light waves)。

爱因斯坦的这一结论引起了一些好奇，比如《爱因斯坦全集》的编者之一、美国阿肯色大学的物理学家肯纳威克 (D. Kennefick) 就对爱因斯坦得出这一结论的原因作了若干猜测。其中首先被猜测为原因的就是引力波不存在偶极辐射这一特点，因为爱因斯坦在信中直接提及了这一特点——虽然并未将之称为原因。除此之外，由于爱因斯坦提到了牛顿近似，肯纳威克猜测他有可能尝试过从所谓的“后牛顿近似”(post-Newtonian approximation) 入手研究引力波。后牛顿近似并不是研究引力波的方便手段，因为在这种近似中，以源的运动速度——确切地说是其与光速的比值 v/c——的幂次来排序的话，要计算到五次项才能显示引力波的存在(五次项对应的是引力波四极辐射带来的辐射阻尼效应)，这远远超出了早期广义相对论研究的范围。肯纳威克认为，后牛顿近似中的低次项未能显示引力波的存在也有可能是爱因斯坦认为引力波不存在的原因。

肯纳威克的这些猜测不能说没有道理，但在我看来有一定的过度解读之嫌，因为爱因斯坦所谓的“不存在与光波相类似的引力波”，从字面上看，完全有可能只是说引力波哪怕存在，也并不“与光波相类似”(比如不存在偶极辐射)，而未必是全盘否定引力波的存在(因此我们在上文中只称之为“有可能是否定的判断”)。由于爱因斯坦没有在其他文字中对这句话作出过进一步说明(事实上也没有进一步说明的必要了，因为通信对象施瓦西在不到三个月之后就不幸去世了)，他这句话的真实含义可能永远只能从猜测的意义上去解读了。但考虑到此后不久爱因斯坦就发表了明确肯定引力波存在的论文——即我们在第四节中提到过的他的第一篇引力波论文“引力场方程的近似积分”，我倾向于猜测“不存在与光波相类似的引力波”并不是对引力波的全盘否定，而很可能只是对研究过程中发现的诸如不存在偶极辐射之类有别于电磁波的引力波特性的一种表述。

有关引力波的另一个微妙的问题是它是否携带能量。从前面的介绍中我们看到，引力波是时空本身的波动——因为其波幅是时空偏离平直的程度 $h_{\mu\nu}$。如果说音乐是空气的波动，那么引力波不妨称之为时空的乐章。但这个浪漫的名称掩不住一个问题，那就是时空是看不见摸不着的，我们对它的量度依赖于度规，度规又跟坐标的选择有关，而坐标的选择在广义相对论中却是任意的。那么，所谓时空的乐章，所谓时空本身的波动，会不会纯粹是一种坐标带来的幻象呢？这不是钻牛角尖，而是一个很正经的问题，因为如果坐标本身在波动，那么哪怕平直的时空也会看上去仿佛是波动着的，就好比用一把本身就在伸缩的尺子去量一个物体，哪怕物体的长度是固定的，每次量得的结果也可以是不同的，但那显然是尺子的问题而不是物体的长度在变。

事实上，爱因斯坦本人就曾注意到，采用不同的坐标可以得到不同类型的引力波，其中的某些类型确实只是坐标本身相对于平直时空的波动，而不是真实的引力波。以验证广义相对论的光线偏折效应而成名的英国物理学家爱丁顿 (A. Eddington) 也从坐标角度出发质疑过引力波，他发现引力波的某些分量的传播速度是跟坐标的选择有关的，从而十分可疑，他并且将这种引力波的传播速度戏称为“思维的速度”(speed of thought)。这种因坐标的选择而产生的问题也可以从另一个角度来看，那就是引力场——如我们在第二节中详细介绍过的——在局域惯性系中是不存在的，或者说引力场能通过坐标变换局域地消去。这个特点意味着对一个自由漂浮的质点——真正意义上没有大小的质点——来说，无论多么强大的引力波都是不存在的——美国物理学家惠勒曾用“自由漂浮

就是自由漂浮就是自由漂浮”(free float is free float is free float) 来强调这一引人注目的特点。假如无论多么强大的引力波对于一个自由漂浮的质点来说都是不存在的，那引力波还有实在性吗？

答案是肯定的。

得出肯定答案的最简单的办法就是计算曲率张量，因为曲率张量——乃至一切张量——是否为零是一个与坐标选择无关的特征，因此引力波若果真只是坐标本身相对于平直时空波动带来的幻象，曲率张量就该为零。反之，若曲率张量不为零，则引力波就不只是幻象，而是货真价实的(虽然其中的某些分量依然可以有“水分”)。计算表明，对于上文给出的弱场近似下的引力波动方程的推迟解来说，曲率张量的非零分量为：$R_{i0j0}=-½\partial^2 h_{ij}/\partial t^2$。由于引力波的非零分量 h_{ij} 是周期变化的，其对时间的二阶导数不为零，因此相应的 R_{i0j0} 也不为零。这说明引力波是不能用坐标变换消去的，从而并不只是坐标带来的幻象。这跟惠勒那句“自由漂浮就是自由漂浮就是自由漂浮”是不矛盾的，因为曲率张量的不为零说明引力波的效应跟一切其他引力效应一样，虽然能被局域地消去，在全局意义上却是抹煞不了的，一个自由飘浮的质点虽“感觉”不到引力波，一根长杆、一个圆柱……乃至任何具有广延的物体却完全可以受到引力波的影响——事实上那正是引力波的检测途径。

从单纯的理论角度讲，对引力波实在性的最具体的论证当然是直接计算它所携带的能量。这个计算本身也有一定的微妙性，因为它所涉及的是引力场的能量动量，而那本身就是广义相对论的一个著名难题。这个难题追根溯源，也是来自引力场能被局域消去这一特点，因为它意味着引力场的能量动量具有非定域性。几十年来，物理学家们对引力场的能量动量进行了大量研究，给出过许多具体结果，都称不上完美，也始终存在争议。不过对引力波来说，人们通常假定时空是所谓的渐近平直时空 (asymptotically flat spacetime)，在这种情形下，只要所考虑的时空区域的线度显著大于引力波的周期和波长，或者只考虑引力波的辐射功率(它涉及的只是总能量)，那些本质上源自引力场能量动量的非定域性的歧义就能消除。对于我们所考虑的弱场近似来说，情况更为乐观，我们甚至不必利用物理学家们出于普遍目的而提出的那些引力场的能量动量表达式，而可以直接地将引力场方程 (2.9) 式左侧除 $h_{\mu\nu}$ 的线性项以外的其他项——事实上只需平方项，因其余在弱场近似下皆可忽略——移到右侧，作为引力场的能量动量——即将 (2.9) 式改写为：

$$R^{(1)}{}_{\mu\nu} - ½\eta_{\mu\nu}R^{(1)} = 8\pi(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \qquad (5.4)$$

其中左侧的 $R^{(1)}{}_{\mu\nu}$ 和 $R^{(1)}$ 分别是里奇曲率张量 $R_{\mu\nu}$ 和曲率标量 R 中 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，右侧的 $t_{\mu\nu}$ 是 $R_{\mu\nu}$ — ½$g_{\mu\nu}R$ 中 $h_{\mu\nu}$ 的平方项移到右侧与 $T_{\mu\nu}$ 并列的结果，就不具体写出了。将 $h_{\mu\nu}$ 的四极矩解 (5.2) 式代入 $t_{\mu\nu}$ 便可得到引力波的能量动量分布。这个分布作为定域分布是跟物理学家们出于普遍目的而提出的那些引力场的能量动量表达式一样有争议的，但取其中的能流部分对一个远离源的闭和曲面——通常选为球面——积分，却可以得到无争议的引力波四极辐射的辐射功率，具体的形式为：

$$dE/dt = -1/5G\,(\partial^3 Q_{ij}/\partial t^3)\,(\partial^3 Q^{ij}/\partial t^3) \qquad (5.5)$$

其中右侧的负号表明引力波导致的是能量损失——即源因辐射引力波而损失能量。(5.5) 式的推导如今已是很多广义相对论教材的标准内容，但除求导和积分外，还涉及对偏振方向的平均等，计算是相当繁复的，当年就连爱因斯坦本人在有关引力波的第一篇论文中都没能算对，直到 1918 年发表的题为“论引力波”(On Gravitational Waves) 的后续论文中才得以纠正。

(5.5) 式给出的引力波的辐射功率究竟有多大呢？我们将在下节中揭开谜底，我们将具体计算或估算一些典型物理体系——其中包括第三节中提到的拉普拉斯考虑过的月球轨道运动——的引力波辐射功率。那也将是我们首次有机会通过一个具有日常含义的物理量——功率——来直观地了解引力波。我们会看到，月球轨道因引力波造成的“蜕化”绝非观测所能企及，以及庞加莱所寄望的用引力波造成的能量损失来解释水星近日点的进动为什么是完全错误的。我们也会初步看到，在某些特殊体系中的引力波辐射功率可以达到惊人的程度。