量子纠缠态分类

李军利　乔从丰

（中国科学院大学 100049）

1　引言

量子力学是20世纪初最伟大的物理发现之一。尽管来自各个领域的大量实验事实都证实了量子力学是正确的理论，但是人们对量子理论的一些基本原理的争论自始至今却从未间断。其中最著名的就是爱因斯坦等人对不确定原理的质疑所引出的量子力学完备性问题的争论[1]。该文中爱因斯坦根据其对物理实在的定义以及物理理论对定域性的要求得出了量子力学不能提供对物理实在的完备描述的结论，这就是著名的EPR佯谬。在完成论证的过程中爱因斯坦引入了一个不能写成两个单粒子波函数直乘的两体量子态（后来称为纠缠态）。随着量子信息科学的发展，纠缠态在量子信息的众多应用中，如量子密钥分布、超密编码、量子计算等，扮演越来越重要的角色，而且已经被认为是完成量子信息处理的核心物理资源。

根据纠缠态在量子信息中完成任务的不同可将其进行分类。如果两个量子态可以通过局域操作和经典通讯（LOCC，local operations and classical communication）确定地彼此相互转化，那么这两个量子态在用于完成量子信息任务时就是完全等价的。在数学上此等价性表述为两个量子态可以通过局域幺正（LU，local unitary）变换互相转化。如果两个量子态只能概率地通过局域操作和经典通讯（SLOCC，stochastic local operation and classical communication）相互转化，那么这两个量子态原则上可以完成相同的量子信息任务，但有优劣之分。在数学上此等价性表述为两个量子态可以通过局域可逆算符（ILO，invertible local operator）相联系。对纠缠态进行分类不但可以将一些看上去完全不同的量子态归类用以实现相同的量子信息任务，而且可以通过构造不同的纠缠类来探索新的量子信息应用。纠缠态的分类是从量子信息应用的本质而不是具体形式来区分量子态。因此，分类就构成了定量研究纠缠态这一核心物理资源的理论基础。我们可以形象地将量子纠缠分类在量子信息科学的作用类比于编制元素周期表在化学科学中的作用。

两体纯态量子系统的纠缠可以通过矩阵的奇异值分解很好地进行研究。此时，当且仅当其在正交基矢下的系数矩阵具有相同的奇异值时，两体纠缠态是局域幺正等价；当且仅当其系数矩阵具有相同的秩时，两体纠缠是局域可逆算符等价的。然而，对多体高维的纠缠态进行分类是一项非常困难的工作。例如，三体两维系统（三量子比特）在局域可逆变换下已知的真实三体纠缠态有两种（著名的GHZ和W态），当粒子数增至四时（四量子比特）就会出现连续类，即，纠缠类中包含参数，参数取不同值对应不同纠缠类。随着粒子个数的增加描述量子态等价类所需的参数迅速增加。

目前，在纯态系统中对于局域可逆等价性，只对少数系统（如，2×M×N、L×N×N、四量子比特、对称的多量子比特等）有较多研究；对于局域幺正等价性，高阶奇异值分解则可以很好的解决多体分类问题。具体情况如下，在局域可逆等价性方面，在三量子比特系统完成分类后，人们对四量子比特系统进行了研究，得到了九个所谓的纠缠族（entanglement families）。在更多量子比特时，只有在完全对称态下其分类相对易于处理。粒子维数变大时，存在一些判据来判定不同量子态间的等价性。在研究过程中人们逐步认识到矩阵的分解在少体系统的SLOCC分类中的作用。我们组在充分应用矩阵的约当分解的基础上，彻底解决了三体系统的SLOCC分类问题，对2×N×N[2]，2×M×N[3]，L×N×N[4]等系统进行了完整分类。同时，我们的方法在向四体及多体方向推广时显示了强大生命力，如随2×L×M×N等系统的分类。在局域幺正等价性方面，多体纠缠可以通过计算量子态的局域幺正不变量来表征。只有具有相同的局域幺正不变量的那些量子态才是局域幺正等价的，并且人们已经发现N

体纯态和 N−1 体混态的局域幺正等价性之间存在联系。这些局域幺正不变量随着粒子数的增加而急剧增多，此外还存在着如何赋予这些变量物理意义的难题。其次，可以通过构造纠缠类 标准型的方法来进行纠缠态分类。如文献中就通过量子态中系数的束缚方程的方法构造了纠缠类的标准形。对于两维的多体系统，克劳斯 (R.Kraus) 提出了一种构造两个局域幺正等价量子态的连接矩阵的方法，但是随着粒子维数的提高（大于两维）和单粒子约化密度矩阵中多重简并本征值的出现，其验证两量子态等价的方法变得不太实用。

本文主要介绍少体系统的局域可逆等价性分类方法，以及适用于任意多体任意维数的基于局域幺正等价性分类方法 [5]。这些方法应用了矩阵理论中的约当分解以及张量的高阶奇异值分解技术来构造多体纠缠的标准型，通过构造标准型及其所伴随的局域对称性可很方便地判断任给的两个量子态是否是局域可逆等价或者是局域幺正等价。该方法具有简单且直观易于理解的特点。最后我们对纠缠态在量子计算中的应用也做了简要介绍。

2 多体纠缠态的分类

2.1 矩阵的约当分解与三体 2×*N*×*N*、2×*M*×*N*、*L*×*N*×*N* 纠缠体系的 SLOCC 分类

2×*N*×*N* 是指三体系统中一个粒子为量子比特（比如，自旋 1/2 或两能级系统），而另外两个粒子的维数为 *N*(比如，自旋 J=(*N*-1)/2 或其他数目为 *N* 的离散能级）。此类体系的波函数可写为

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{2,N,N} \psi_{ijk}|i\rangle|j\rangle|k\rangle \ , \tag{1}$$

其中 $\psi_{ijk} \in \mathbb{C}$ 是复系数，$|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle$ 分别是三个粒子的一组正交基。另一个量子态 $|\Psi'\rangle$ 与 $|\Psi\rangle$ 是局域可逆等价的，如果

$$|\Psi'\rangle = T \otimes P \otimes Q|\Psi\rangle \ . \tag{2}$$

这里，T, P, Q 是可逆算符，分别作用于第一、二、三个粒子上，其相应地为 2×2、*N*×*N*、*N*×*N* 的可逆矩阵。由于系数 ψ_{ijk} 是一个三阶张量，且第一个指标维数为二，我们可以用一个矩阵对（两个矩阵）来表示这个系数张量，即，

$$\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\psi_1)_{jk}\\ (\psi_2)_{jk}\end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

在此表示形式下，两个量子态的局域可逆等价公式 (2) 转化为

$$\begin{pmatrix}\Gamma_1'\\ \Gamma_2'\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}P\Gamma_1 Q^{\mathrm{T}}\\ P\Gamma_2 Q^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \ , \tag{4}$$

其中，T 是转置操作，而需要特别说明的是算符 T，它作用于两个矩阵上使之产生叠加。于是，我们就将两个 2×*N*×*N* 系统的量子态的局域可逆等价性问题转化为一个矩阵对在可逆矩阵下的转化问题。

这里我们以其中一个最具代表性的情形（即矩阵对中的一个可以构造为满秩矩阵的情况）为例来说明矩阵分解的分类思想。假定第一个矩阵 Γ_1 为满秩，此时我们总可以通过合适的 P 和 Q 矩阵来完成如下变换

$$\begin{pmatrix}P\Gamma_1 Q\\ P\Gamma_2 Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E\\ A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}SES^{-1}\\ SJS^{-1}\end{pmatrix} \ . \tag{5}$$

这样任何一个矩阵对（也即量子态）都可以通过某些可逆的 P，Q 运算而转化为由单位阵和约当标准型所构成的矩阵对。注意，此时还不能依据约当型 J 作为等价类的标准型，因为还存在 T 变换。我们证明，T 变换的作用是对约当标准型中的对角元做一个分式线性变换。至此，我们可以通过如下定理来判断两个量子态的等价性：

定理 1　约当标准型 J 在其对角元差一个相应的分式线性变换下构成 2×*N*×*N* 纯态系统在局域可逆变换下的等价类。

此方法将量子态等价类中的有效参数的数量大大化简，并可充分利用成熟的约当标准型理论来对纠缠态的类进行定性和定量的研究。2×*M*×*N* 系统的分类和 2×*N*×*N* 系统类似，只是此时的矩阵对不是方阵而是矩形矩阵。一般情况下，对于相同的 *N*，2×*M*×*N* 的分类要比 2×*N*×*N* 的分类简单。

虽然可用类似方法研究 *L*×*N*×*N* 系统的纠缠分类，但是 *L*×*N*×*N* 系统的 SLOCC 分类要复杂的多。我们还以满秩情况为例来说明，此时量子态不再由一个矩阵对而是一组 *L* 个 *N*×*N* 的矩阵来表示

$$\psi = (E, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_L)\ . \tag{6}$$

此时，公式 (5) 相应地变为

$$(E, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_L) = (SES^{-1}, SA_2S^{-1}, \cdots, SA_LS^{-1})\ . \tag{7}$$

公式 (7) 将量子态的 SLOCC 等价性问题与一组矩阵的共同相似变换问题联系在了一起。数学上的研究表明，不管该组矩阵中的矩阵个数为多少，共同相似变换问题总可以等价地转化为两个对易矩阵的同时相似变换问题。

2.2　矩阵的重排与 2×*L*×*M*×*N* 纠缠体系的 SLOCC 分类

矩阵分解的方法还可以与其他方法相结合用以对更多粒子情况进行分类。矩阵重排 (matrix realignment) 最初用来研究两体混态系统的纠缠判据，并被引入到多体 LU 分类中。为了说明何为矩阵重排，首先需要定义矩阵的矢量化。一个 m×n 的矩阵 A 的矢量化可写为

$$\mathrm{vec(A)} \equiv (a_{11}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, \cdots, a_{m2}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{mn})^{\mathrm{T}}\ . \tag{8}$$

如果一个矩阵 A 的行列分别为 $m = m_1m_2, n = n_2n_2$，那么，它可以写为如下的分块矩阵

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n_1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_11} & A_{m_12} & \cdots & A_{m_1n_1} \end{pmatrix}\ . \tag{9}$$

这里的 A_{ij} 都是 $m_2 \times n_2$ 的子矩阵。矩阵 A 的重排定义为

$$\mathscr{R}(\mathrm{A}) \equiv (\mathrm{vec}(A_{11}), \cdots, \mathrm{vec}(A_{m_11}), \mathrm{vec}(A_{12}), \cdots, \mathrm{vec}(A_{m_1n_1}))^{\mathrm{T}}\ , \tag{10}$$

这里重排后的矩阵 $\mathscr{R}(\mathrm{A}) \in \mathbb{C}^{m_1n_1 \times m_2n_2}$。矩阵重排的重要作用是可用来判定一个高维矩阵是否可写成两个低维矩阵直积的形式。我们有如下定理：

定理 2 **当且仅当** $\mathscr{R}(\mathrm{A})$ **的秩为 1 时，矩阵 A 可以写为一个** $m_1 \times m_2$ **和一个** $n_1 \times n_2$ **矩阵的直积形式。**

我们将该矩阵重排的方法应用到四体的 2×*L*×*M*×*N* 纠缠系统的分类。具体方案如下。首先，我们将系统看做一个三体的 2×*L*×(*MN*) 系统。这个过程可以称之为分组，即将两个粒子看做一个组合粒子。然后，我们可以用上文中三体 2×*M*×*N* 系统的分类方法，但此时所得的类并不是 2×*L*×*M*×*N* 系统的纠缠类。如果两个 2×*L*×*M*×*N* 系统的态分组后具有相同的标准型，我们会得到它们各自转化到该标准型的矩阵。如果这两个矩阵的乘积可写成两个低维矩阵（须是 *M*×*M*，*N*×*N* 的两个矩阵）的直积的形式时，它们才是 SLOCC 等价的。这种方法也可以应用于包含一个量子比特的五体系统。但是向更多粒子的扩展并不平庸且变得非常复杂。因此，新的更有效的矩阵工具需要引入用以化简分类。

2.3　矩阵的奇异值分解与两体纠缠体系的 LU 分类

对于两体纯态系统，例如两个希尔伯特空间维数为 I_1 和 I_2 的粒子组成的态，量子态所对应的张量可表示为一个矩阵 $\Psi = [\psi_{i_1i_2}] \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$（$I_1$ 行 I_2 列的复矩阵）。在量子态的矩阵形式下 LU 等价性就是 $\Psi' = U^{(1)}\Psi U^{(2)}$，其中 $U^{(1,2)}$ 是幺正矩阵。现在考虑 $I_1 \times I_2$ 维的矩阵的奇异值分解

$$\Lambda = U\Psi V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_I)\ , \tag{11}$$

其中 $\lambda_i \geq \lambda_j \geq 0, \forall i < j, I = \min\{I_1, I_2\}$。如果不计对角元的排列顺序，每一个矩阵的奇异值分解是唯一确定的。因此 Λ 矩阵唯一地表征了一个矩阵在幺正变换下的不变量，也就是：两个两体纯态波函数是局域幺正等价的，当且仅当它们对应的矩阵具有相同的奇异值分解。

2.4　张量的高阶奇异值分解与多体纠缠体系的 LU 分类

本节我们重点说明多体纯态系统在局域幺正等价性下的分类情况。类比于公式 (2)，两个量子多体态 $|\Psi'\rangle$ 和 $|\Psi\rangle$，在局域幺正变换下等价是指

$$|\Psi'\rangle = U^{(1)} \otimes U^{(2)} \otimes \cdots \otimes U^{(N)}|\Psi\rangle \tag{12}$$

其中，$U^{(i)}$ 是幺正矩阵。类似的我们也有相应的系数矩阵之间的关系式

$$\psi'_{j_1j_2\cdots j_N} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_N} U^{(1)}_{j_1i_1} U^{(2)}_{j_2i_2} \cdots U^{(N)}_{j_Ni_N} \psi_{i_1i_2\cdots i_N} \tag{13}$$

可以看出量子态可以用一个复 *N* 阶张量 Ψ 来表示，$\psi_{i_1i_2\cdots i_N}$ 就是量子态在表示基矢下的系数。

高阶奇异值分解是矩阵奇异值分解的推广这里我

们介绍其基本方法。首先定义高阶张量 Ψ 按某个指标 n 的矩阵展开

$$\Psi_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times (I_{n+1} I_{n+2} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1})} . \tag{14}$$

此时 $\Psi_{(n)}$ 为一个 I_n 行 $I_{n+1} \times I_{n+2} \times \cdots \times I_N \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n-1}$ 列的矩阵。以三量子比特的张量为例，$\psi_{ijk}, i, j, k, \in \{1,2\}$ 按第 1,2,3 个指标展开分别为：

$$\begin{aligned}
\Psi_{(1)} &= \begin{pmatrix} \psi_{111} & \psi_{112} & \psi_{121} & \psi_{122} \\ \psi_{211} & \psi_{212} & \psi_{221} & \psi_{222} \end{pmatrix} , \\
\Psi_{(2)} &= \begin{pmatrix} \psi_{111} & \psi_{211} & \psi_{112} & \psi_{212} \\ \psi_{121} & \psi_{221} & \psi_{122} & \psi_{222} \end{pmatrix} , \\
\Psi_{(3)} &= \begin{pmatrix} \psi_{111} & \psi_{121} & \psi_{211} & \psi_{221} \\ \psi_{112} & \psi_{122} & \psi_{212} & \psi_{222} \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{15}$$

高阶奇异值分解求法如下，求按每一个指标展开后的矩阵 $\Psi_{(n)}$ 的奇异值分解，得出左奇异矢量构成的幺正矩阵 $U^{(n)}$。以三量子比特为例，也就是求 $\Psi_{(i)} = U^{(i)} \Lambda_{(i)} V^{(i)}, i \in \{1,2,3\}$ 中的 $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}$。求得 $U^{(n)}$ 后，高阶奇异值分解就可表示为

$$\Omega = U^{(1)} \otimes U^{(2)} \otimes \cdots \otimes U^{(N)} \Psi , \tag{16}$$

这里 Ω 称为张量 Ψ 的核心张量，也就是张量的高阶奇异值分解相当于矩阵奇异值分解中的 Λ。可以看出 Ω 和 Ψ 同为 N 阶张量。定义张量内积 $\langle A, B \rangle \equiv \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_N} a^*_{i_1 i_2 \cdots i_N} b_{i_1 i_2 \cdots i_N}$，那么任何一个通过指定 Ω 的第 n 个指标而获得的一个 N–1 阶张量 $\Omega_{i_n = l}$ 有如下性质

$$\langle \Omega_{i_n = l}, \Omega_{i_n = m} \rangle = \delta_{lm} (\sigma_l^{(n)})^2 \tag{17}$$

其中 $\sigma_l^{(n)} = \| \Omega_{i_n = l} \| \equiv \sqrt{\langle \Omega_{i_n = l}, \Omega_{i_n = l}}$ 为 $\Psi_{(n)}$ 的奇异值。

回想两体纠缠态情形，我们很自然地设想能否以核心张量 Ω 来表征任意量子态在局域幺正变换下的纠缠类？事实是否定的。这是因为同一个 Ψ 所对应的 Ω 并不唯一。这可以从以下两个方面看出。首先，如果对第 n 个指标的张量展开的 $\Psi_{(n)}$ 的奇异值各不相等，且 $\Omega_{(n)}$ 为其核心张量相应的矩阵展开，那么与其差一个相位变换的 Ω' 也是 Ψ 的核心张量（即 Ω' 也满足 (17) 式）。其次，如果第 n 个指标张量展开 $\Psi_{(n)}$ 的奇异值存在简并，那么这些简并的奇异值所对应的核心张量间可以差一个任意的幺正变换。也就是说，

$$\Omega'_{(n)} = \left[\bigoplus_{i=1}^{k_n} u_i^{(n)} \right] \Omega_{(n)} \equiv S^{(n)} \Omega_{(n)} \tag{18}$$

也是 Ψ 的核心张量（即满足 (17) 式），$u_i^{(n)}$ 是与奇异值简并程度相应的幺正矩阵。显然，与两体纠缠情况不同，这里对应于奇异值矩阵的核心张量并不唯一，所以其不能用来确定不等价的纠缠类。

上面已经说明量子态所对应核心张量 Ω 不构成纠缠态的类，也就是不同的 Ω 可能为同一纠缠类。这里我们引入一种新的方法来利用 Ω 构造多体纠缠的在局域等价性类。注意到，虽然每一个多体量子态都对应不止一个核心张量，但是从 (18) 式中可以看出，所对应的这些核心张量都满足了很好的对称性。也就是说如果 Ω 是 Ψ 的核心张量那么只有

$$\Omega' = S\Omega \text{ , } S = \otimes_{n=1}^{N} \left[\oplus_{i=1}^{k_n} u_i^{(n)} \right] \tag{19}$$

才也是 Ψ 的核心张量。由此我们就有如下结论：

定理 3　核心张量 Ω 及其所关联的对称群 S 构成多体纠缠态纯态在局域幺正等价性的类。

换言之，如果两个多体纠缠态所对应的核心张量不同且不能通过 S 相转化那么它们一定是局域幺正不等价的。注意这里的 S 并不是任意的局域幺正变换，而是与核心张量的矩阵奇异值的简并类型一一对应的。

实际中我们常遇到这样的问题：任给的两个多体纠缠态，如何判断其是否局域幺正等价的？如果等价它们之间的转化的幺正矩阵是什么？这两个问题可以用我们介绍的方案非常有效地解决。设任给的两个量子态为 $|\Psi\rangle = \sum_{i_1, \cdots, i_N} \psi_{i_1 \cdots i_N} |i_1, \cdots, i_N\rangle$，$|\Psi'\rangle \sum_{i_1, \cdots, i_N} \psi'_{i_1 \cdots i_N} |i_1, \cdots, i_N\rangle$，我们可先求出其对应的核心张量 Ω 和 Ω'。矩阵的奇异值分解是易于用计算机完成的，所以核心张量以及转换至核心张量的幺正矩阵都可求得，实际上目前的专业数学软件都包含计算矩阵奇异值分解的子程序。现在我们要做的是判断 Ω 和 Ω' 所对应的对称性 S 和 S' 是否相同。如果 Ω 和 Ω' 按某个张量指标的矩阵展开中其奇异值有不同（包括重复度 $\mu_i^{(n)}$）则 Ψ 和 Ψ' 一定是局域幺正不等价的。如果 Ω 和 Ω' 按所有张量指标的矩阵展开的奇异值及其重复度均完全相同，我们则需要判断是否存在 S 使 $\Omega = \Omega'$，最终得到如下形式的方程

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_1^{(N)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_2^{(N)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_{k_N}^{(N)} \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} \vec{\omega}_{r_1} \\ \vec{\omega}_{r_2} \\ \vdots \\ \vec{\omega}_{r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega}'_{r_1} \\ \vec{\omega}'_{r_2} \\ \vdots \\ \vec{\omega}'_{r_m} \end{pmatrix} \tag{20}$$

这里张量 Ω 和 Ω' 我们都已转换为列矢量形式，并且已经根据 S 矩阵直和形式做了相应的分段。(20) 式是非常有意义的，因为 S 矩阵直和形式将一个复杂的张量 Ω 和 Ω' 的相互转化问题化为很多更小的张量的转化问题。这些更小的张量的列矢量形式就是 $\vec{\omega}_{r_i}$，例如 (20) 式的第一行就是

$$u_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_1^{(N)} \vec{\omega}_{r_1} = \vec{\omega}_{r_1} \tag{21}$$

可以看出，这又是一个张量的局域幺正等价性问题，我们可以递归地对 (20) 式中的每一段矢量 $\vec{\omega}_{r_i}$ 重复地使用高阶奇异值分解，最后就得出是否存在这样的 S 的结论。如果存在，那么 Ψ 和 Ψ' 局域幺正等价而且其连接矩阵实际上已经求出来了。相反如果这样的 S 不存在，我们就说 Ψ 和 Ψ' 是局域幺正不等价的。这里需要注意的是，在最后判断两个纠缠态是否是局域幺正等价时，仅存在一种最坏情况就是所有粒子的单粒子约化密度矩阵都是完全简并的。这里核心张量的对称性 S 不再是直和的形式而是 N 个幺正矩阵直积的形式。此时问题求解需要进一步的详细研究。

3 多体纠缠态在量子通讯中的应用

目前纠缠态已经成为量子信息处理的核心物理资源，不同的纠缠态可以用来实现不同的量子信息任务。在三量子比特系统中存在 GHZ 和 W 两种真实的三体纠缠态。虽然目前尚无如何来度量多体纠缠的完整定义，但一般意义上人们认为 GHZ 态是最大纠缠态，同时它也是脆弱的纠缠态（相对 W 态而言）。因为，三个粒子中任何一个粒子信息的丢失都会导致剩余的两个不再纠缠，而 W 态在损失一个粒子时，剩余的两个粒子中仍有残余的纠缠存在。此性质使 GHZ 态可用于多体的秘密共享协议，而 W 态可用于量子存储器。

量子通讯主要涉及的内容和协议有：量子密钥分布，量子隐形传态，以及量子超密编码等。量子密钥分布最初可追朔到 1983 年威斯纳（S.Wiesner）提出的“量子钱币”的概念。随后，班尼特（C.Bennett）等人基于量子不可克隆原理提出了著名 BB84（发表于 1984）协议来实现量子密钥分发。1999 年，人们基于多体纠缠提出了量子秘密共享协议。这其中包括两个方面，其一是量子密钥分布的一个多体推广；另一个则如字面意思，即量子形式的信息只共享在授权者手中的一个协议。同时要实现量子信息的广域传播，量子中继和量子存储扮演着重要作用，而其中这两者中多体纠缠都是不可或缺的。

量子隐形传态则是通过一个两体纠缠态可将一个未知的量子态通传递至任意远处。多体纠缠态可以用于实现多个粒子构成的未知量子态（它们彼此之间可能存在纠缠）的远程传输。实际中要将一个系统的完整信息实现隐形传态，可以通过超纠缠（一个粒子多个维度的纠缠）或多体纠缠来实现。可以看出，多体纠缠是量子信息技术实用化和可扩展化的必要物理资源，对其定性和定量的研究是量子信息理论的一个基本问题。

4 总结

这里我们介绍了利用矩阵分解以及张量的高阶奇异值分解来解决多体纠缠态分类的问题并简单列举了它们在量子计算中一些应用。矩阵的分解是将纯态系统的量子态转换为所谓标准型来进行比较的。而高阶奇异值分解则是将多体纠缠态的局域幺正类完全列了出来（可差一个特定对称性的核心张量）而大大简化了判断两个任意多体纠缠态是否局域幺正等价性及等价情况下的转换矩阵的计算。至此，三体的 SLOCC 分类以及多体的 LU 分类均可得以较好的系统研究。由于纠缠态是量子信息应用的核心物理资源，可扩展的量子计算依赖于多体纠缠态，因此对多体纠缠的完全分类对探索具体物理系统的量子信息处理以及发展新的量子信息应用都有着重要的实用价值。近年来量子通讯已经逐步实现商业化，而其中多体高维纠缠在量子密钥分布、量子隐形传态等都有着重要应用。

参考文献

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? Phys. Rev. 47, 777 (1935).

[2] Shuo Cheng, Junli Li, and Cong-Feng Qiao, Classification of the entangled states of 2 ×N ×N, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 055303 (2010).

[3] Xikun Li, Jun-Li Li, Bin Liu, and Cong-Feng Qiao, The parametric symmetry and numbers of the entangled class of 2×M×N, Sci. China G 54, 1471-1475 (2011).

[4] Jun-Li Li., Shi-Yuan Li, and Cong-Feng Qiao, Classification of the entangled states L×N×N. Phys. Rev. A 85, 012301 (2012).

[5] Bin Liu, Jun-Li Li, Xikun Li, and Cong-Feng Qiao, Local unitary classification of arbitrary dimensional multipartite pure states, Phys. Rev. Lett. 108, 050501 (2012)