

# 当拓扑已成家常

刘俊明

(南京大学物理学院 210046)

拓扑——作为一个空间几何概念——在我们脑海中不过是一个若隐若现的名词，与我们的日常生活并无多少交集。数学中，拓扑表示了实空间几何体的一种分类方法。当我们对千千万万不同几何构型的描述缺乏耐心和简明扼要的语言时，就用一种数学上虽然很严谨很高大但在日常生活中却很虚无缥缈的表示来描述，如图 1 所示。这大概就是科学有时候因为力不从心而不得不让自己阳春白雪的原因，其实是自己遇到了窘境而无可奈何。即使如我等所谓受过长期物理熏陶的大多数人，对“拓扑”也总是倍觉眩晕，这也使得拓扑学的研究只是小众，很抱歉！拓扑一个“数”，无影亦无规。千万几何体，混混一统随，均属概莫能外。

时光荏苒，在物理学、特别是凝聚态物理学中，拓扑物理的研究不过是沧海一粟，星星点点、从未燎原，一直到拓扑绝缘体物理的孕育和兴起。拓扑绝缘体效应等同于为量子霍尔效应找到一个鲜亮的出口，使得拓扑从贵族走向大众。这无疑给“旧时王谢堂前燕，飞入寻常百姓家”做了一番与文学家截然不同的新注解，同时也加速了诺贝尔奖“花落拓扑”的步伐。2016 年的诺贝尔物理学奖审时度势，“不得不”授予了拓扑物理。对这一重大事件与拓扑物理的内在联系，一众名家从不同角度纷纷解读，真知灼见、娓娓道来，给学术百姓以精神食粮，给学术精英以咖啡茗茶。中文解读如文小刚、胡江平、施郁、戴希等学者，都有精彩文章和科普佳作，轮不到我说三道四。这里，我说一点点简单的、不是那么“拓扑”的物理，以呈现解读的下里巴人层次。

凝聚态中的拓扑物理研究最开始是从实空间的某些拓扑结构开始的，如 TK 研究 XY 模型中的 vortex-antivortex 态及其相变。由于这类结构的局域性，相关研究成果一直未能与某种具有实用价值的物理性质联

系起来。这应该是拓扑物理在凝聚态中一直寡言少语、郁郁寡欢的原因。与此不同，量子霍尔效应及其对应的拓扑量子态在动量空间中展示的拓扑结构，是电子波函数形状的拓扑结构特征，与凝聚态的光电磁等物理行为密切相关；其潜在应用价值不容置疑，理所当然使得动量空间中的拓扑成为明星。尽管如此，相比之下，还是实空间的拓扑结构更加直观和容易理解，更容易“飞入寻常百姓家”。图 2 所示就是典型的二维 XY 模型中 vortex-antivortex 缺陷对和现在正备受宠爱的 skyrmion 拓扑准粒子图像。这两种结构都可以用某种拓扑示类来表达。

坦率地说，凝聚态中实空间拓扑结构因为对应着某种形态上的对称性和美丽面貌，使得人性中那丝丝感性的欲望与理性的思维结合起来，一定程度上促进了拓扑物理的发展脚步。这是一种人性中无形的视觉刺激，不妨称之为“拓扑美景”，令人欲罢不能。除了图 2 所示范例，还有一类正逐渐获得青睐、并在拓扑诺奖大旗下开始“飞扬跋扈”的新拓扑结构  $\frac{3}{4}\frac{3}{4}$  铁性畴结构的拓扑表象。图 3 所示是几个最近观测到的实例。毫无疑问，这些结构展示出无形魅力，使得那些于对称性与“拓扑美景”情有独钟的学者爱不释手，诠释了“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”的精神。

这里，我们不妨从铁电体物理角度对铁电畴拓扑结构的图像做一点粉饰说明。这一问题最为著名的实例就是 Sang-Wook Cheong 在六角晶格锰氧化物中发现的  $Z_6$  拓扑缺陷态。以  $YMnO_3$  为例，其在铁电态区间存在一种称之为 ab 面内三聚化 (trimerization) 的结构畸变，如图 4(A-b) 所示，导致所谓的  $Z_3$  对称性 (这里特定为 transitional antiphase variant) 也就是 MnO 面内形成相互  $120^\circ$  夹角的三聚体，对称排列。与此同时，这一体系的铁电极化来源于 Y 离子沿 c 轴方向

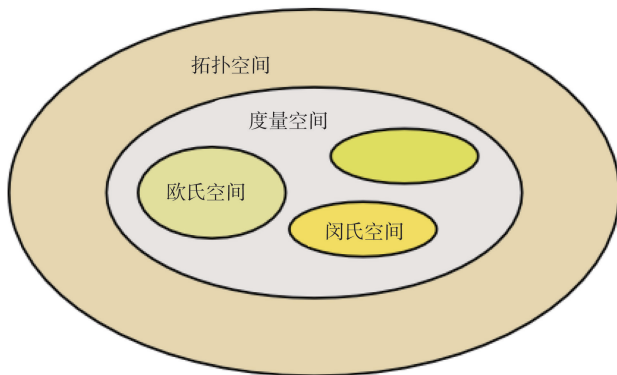
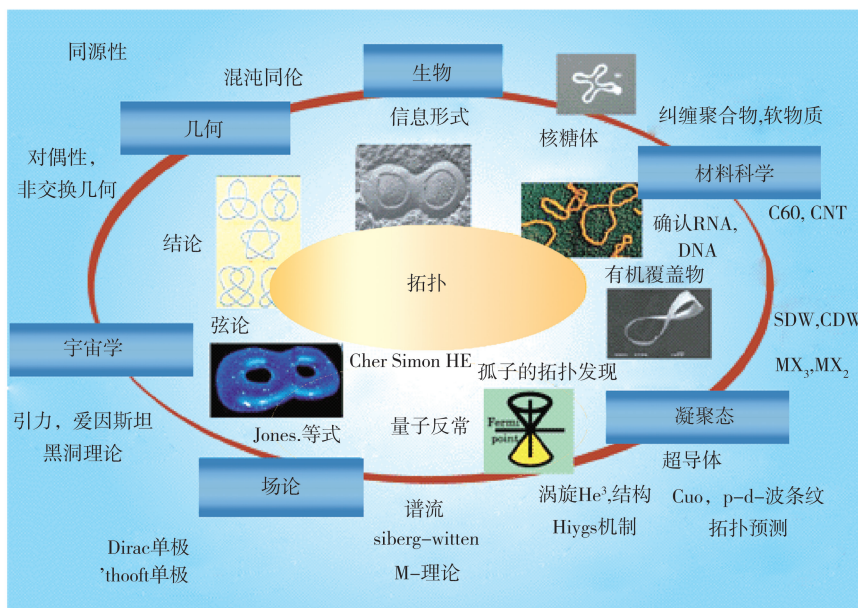
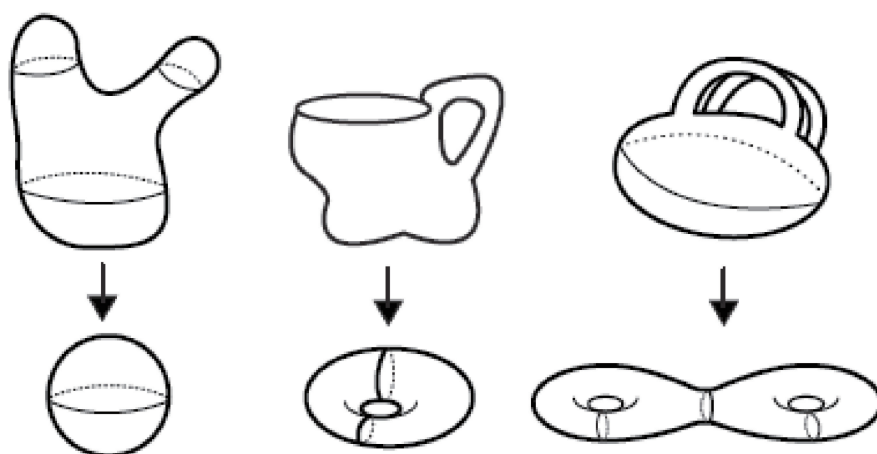


图 1 上：三类具有不同拓扑性质的几何体。中：拓扑物理的一些分支。下：数学上拓扑的范畴，我们熟知的欧几里得空间和闵可夫斯基空间与拓扑空间的关系一目了然



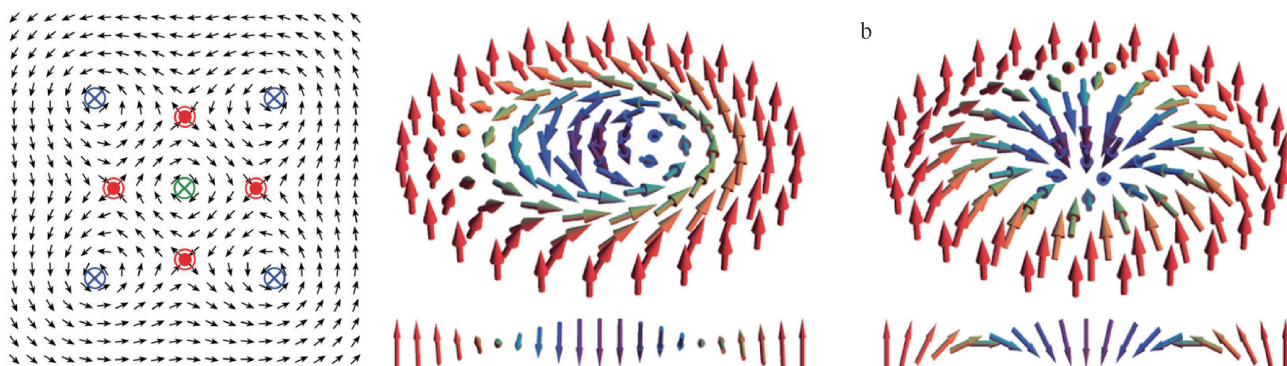


图2 左: vortex-antivortex 拓扑缺陷对, 蓝色标记 vortex, 红色心标记 antivortex。右: 实空间拓扑结构的另一个实例——skyrmion

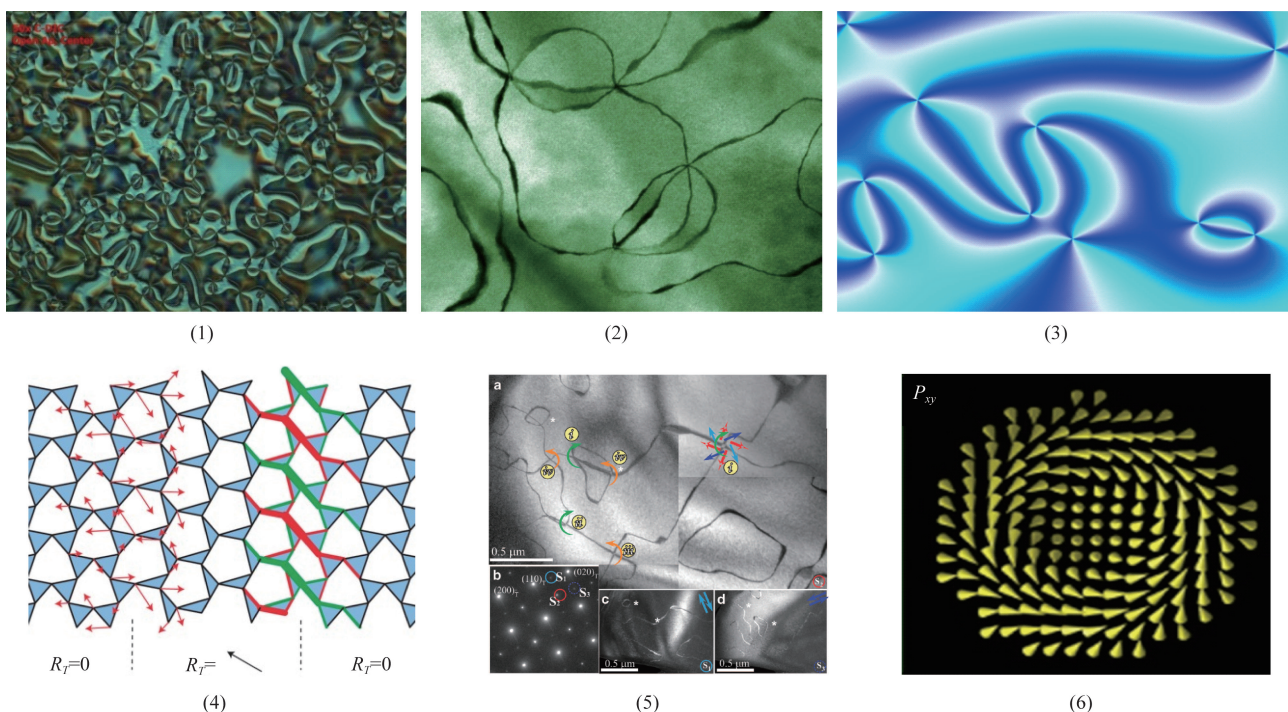


图3 几种实空间中的拓扑美景。(1)Hexagonal RMnO<sub>3</sub> 中的铁电畴; (2)Fe<sub>1/3</sub>TaS<sub>2</sub> 中的结构畴; (3)超流中的扭结; (4)Isostatic lattice 中的畴界拓扑模; (5)Ca<sub>3-x</sub>Sr<sub>x</sub>Ti<sub>2</sub>O<sub>7</sub> 中的 vortex-antivortex 拓扑缺陷对; (6)铁电环纳米点中的面内极化 vortex 结构

的位移, 也有  $\pm c$  两个简并方向, 也就是所谓的  $Z_2$  对称性 (这里特定为 directional variant)。面内和  $c$  轴的  $Z_3$  与  $Z_2$  结合起来, 构成了  $Z_3 \times Z_2$  的六重拓扑畴形态, 如图 4 (B) 所示。在三维空间, 这种六重对称必然形成 vortex-antivortex 的拓扑缺陷对, 也就是图中所示的六重对称畴结构, 令人既击掌称赞又心存恐惧。六角结构锰氧化物中这种奇特的拓扑形貌最近几年引起了很多人关注, 包括我国物理所的李建奇和清华的朱静课题组。Cheong 竟然还将其牵扯到宇宙学, 足见其研究院阶段宇宙学学习没有白费。不过, 让人疑惑的

是这种拓扑缺陷对的稳定性和拓展性, 比如最近朱静老师就用一对部分位错将拓扑畴钉扎住, 很容易就实现了“ $Z_4 \times Z_2$ ”对称畴结构, 其中的拓扑保护性问题值得咀嚼。

当然, 像 Sang-Wook Cheong 这种擅长标新立异之家, 走出了第一步并尝到了甜头, 他是不会善罢甘休的。最近, 他又陆陆续续在一些其他对称性的晶体中看到一系列不同  $Z_m \times Z_n$  对称性的畴结构, 如 Fe<sub>1/3</sub>TaS<sub>2</sub> 中的拓扑畴 (图 3(2))。2016 年 10 月 7 号, 他又针对 Ca<sub>3-x</sub>Sr<sub>x</sub>Ti<sub>2</sub>O<sub>7</sub> 中丰富的畴结构对称性, 推出

了他们的新作“Topological defects at octahedral tilting plethora in bi-layered perovskites”，其中文笔更是令人

眼花缭乱、目不暇接，也充分体现出物理学研究擅长在简单和复杂之间游移和狩猎的特性。

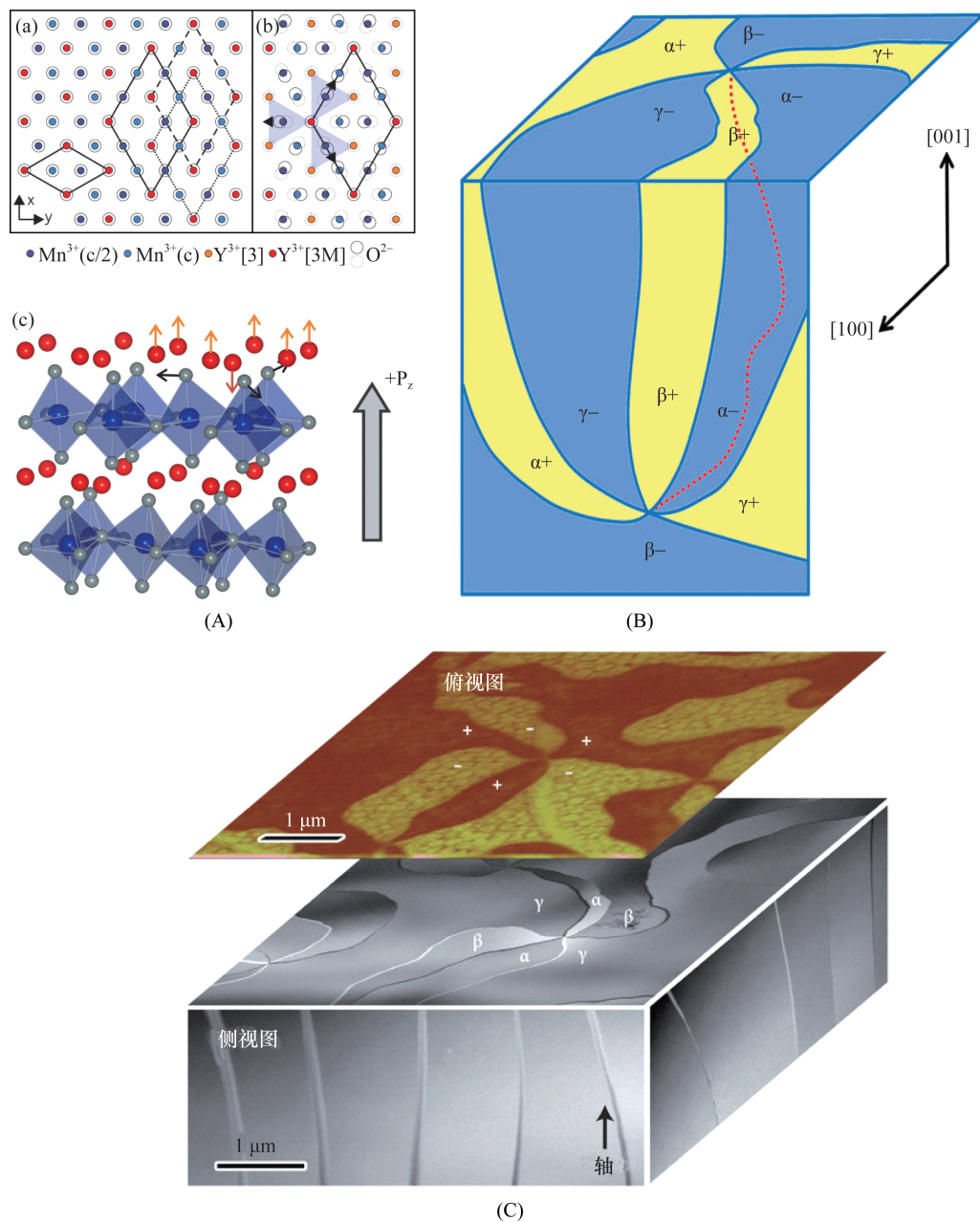


图4 六角YMnO<sub>3</sub>中的Z<sub>3</sub>×Z<sub>2</sub>六重对称拓扑畴结构。(A): (a)是高温高对称结构，六角对称性；(b)是低温铁电晶格结构，因为结构的三聚化，形成三重对称的结构畴，即所谓的Z<sub>3</sub>: (α, β, γ); (c)显示了沿c轴方向的Y离子位移，形成简并的极化方向±P<sub>z</sub>，即所谓的Z<sub>2</sub>两重对称性。Z<sub>3</sub>与Z<sub>2</sub>结合起来，就是Z<sub>3</sub>×Z<sub>2</sub>六重对称拓扑畴结构，如图(B)所示。在三维空间，这样的拓扑结构必然形成vortex-antivortex拓扑缺陷对，图(C)所示