

从伊辛模型到社会物理学

吴梦丽 朱陈平

(南京航空航天大学应用物理系 211106)

最近二三十年以来,不少有识之士开始主张这样的新观点:物理学不仅能够追求“物质之理”,也可以探究“事物之理”(黄吉平,《现代物理知识》2015年第3期)。人们注意到,统计物理学不仅仅限于探究无生命的微观个体所组成的宏观系统的性质,而且已经被拓展用于描写由有生命的个体甚至能独立思考的人所组成的社会系统的种种现象,从而催生了经济物理学、社会物理学等新的学科方向。

人与人之间的相互作用促使社会上对同一问题形成了不同的观点,也产生出人群中千差万别的行为方式。对于观点的形成及其动力学的研究已经成为社会物理学的重要领域。观点动力学与社会结构相互耦合会导致观点一致化的舆论。其实,大众观点的形成是一个从个性化的离散效应向在社会影响作用下趋向整体一致的转变过程,群体智能的涌现是它的显著特征。这种社会现象十分类似于顺磁体中杂乱无序取向的局部磁矩在温度下降时趋向磁矩取向一致的过程,以宏观序参量——磁化强度 M 的涌现(或者称作自发磁化相变)为特征。这样,物理学家们就找到了从统计物理的视角去观察、理解社会现象的一种途径。特别地,对于两种持相互对立观点的个体的状态及其相互作用关系,人们很容易联想起简化描写自发磁化的伊辛(Ising)模型。让我们从伊辛模型谈起。

一、伊辛模型

伊辛模型以物理学家恩斯特·伊辛(Ernst Ising)命名,用于描述物质的铁磁性。这个模型中包含了可以用来描述单个原子磁矩的参数,其值只能为+1或-1,分别代表自旋向上或向下,这些磁矩通常会按照某种规则排列,形成晶格(图1)。在模型中会引入特定交互作用的参数,使得相邻的自旋互相影响。虽然这个模型对物理现实作了相当粗糙的简化,但是,

它却准确地描写了铁磁性物质的自发磁化相变(当温度下降,物质从顺磁态突变到铁磁态,磁化强度 M 从零连续地变成非零值)。事实上,一个二维的方晶格伊辛模型是已知最简单而会产生相变的物理系统。

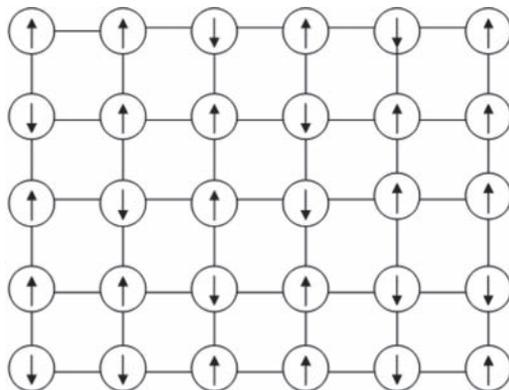


图1 二维伊辛点阵模型

在于涿、郝柏林和陈晓松所著的《边缘奇迹:相变与临界现象》一书中,对伊辛模型描述如下:晶格中每个格点 i 上都有一个磁矩 σ_i ,它可以取向上($\sigma_i=+1$)或向下($\sigma_i=-1$)两种状态。系统的一个具体的微观状态 σ 就是指每个格点上的 σ_i 是+1或是-1,于是 $\sigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i\}$ 。 N 个格点上每个 σ_i 都可以独立地取2种状态,一共有 2^N 种状态。模型只考虑最近邻相互作用,为了解释铁磁性,应当认为两个相邻磁矩平行时能量较低,令其等于 $-J$,而反平行时能量较高等于 $+J$ 。正数 J 是磁矩间的相互作用强度。其实,相变是这样一个宏观系统最为重要的物理性质。在磁矩上下取向的规则格子(如图1所示)中,相互作用 J 倾向于使相邻的磁矩取向一致化(如图2(a)中 $T/T_c < 1$ 的范围的纵坐标 $M > 0$),系统处在铁磁态;而在有限温度下的无规则热运动则倾向于破坏全局磁矩的一致性,使得磁矩向上或者向下都不能占据优势,从而使磁化强度恒为零(如图2(a)中, $T/T_c > 1$ 的

范围的纵坐标 $M = 0$ ），宏观上不显示磁性，系统处在顺磁态。

伊辛以后的科学家们的努力证明了，在二维或二维以上的伊辛模型中，系统可以经历从顺磁态到铁磁态的相变。如图 2 所示，在没有外磁场作用的二维正方点阵伊辛模型中，随着温度 T 的不断升高，当 T 经过临界值 T_c 时，系统的磁化强度发生从 1 到 0 的连续变化（图 2 (a)， $T/T_c = 1$ ），系统由铁磁态变为顺磁态，临界值 T_c 就称为相变点。系统的比热在临界温度 T_c 处发散（图 2 (b)，a, b 尖峰，其中 a 为 T_c 严格解，b 为 T_c 的平均场近似结果）。

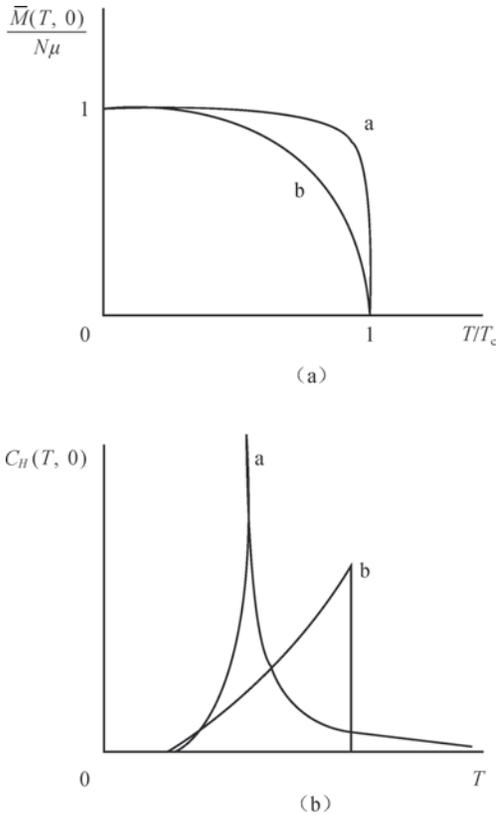


图 2 二维伊辛模型的磁化强度 $\bar{M}/N\mu$ (a) 和比热 C (b) 随温度 T 的变化（其中 μ 为与自旋相联系的磁矩）

二、伊辛模型在社会物理学中的拓展

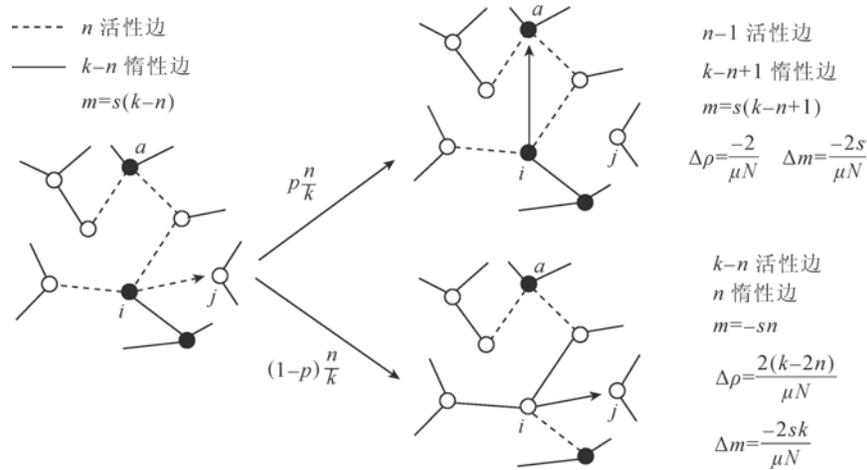
1. 选举人模型 (VM)

选举人模型是社会问题中的一个描述两态意见传播和集体意见形成动力学的模型，具有很长的

研究历史。起初，选举动力学是从数学家的早期研究中提出来的，后来被霍莱 (R. Holley) 和利盖特 (T. Liggett) 更名为“选举人模型”。选举人模型可以看做是伊辛模型的变形，伊辛模型不含时间，可调参数是外磁场，而选举人模型包含时间，个体状态可以随着时间变化，可以看成非平衡的伊辛模型，是非平衡统计物理在实际问题中的一个应用范例。复杂网络研究方法已经被用于研究社会现象。图 3 描写了这种网络中以节点 i 为中心的一个局部图的一个时步的演化。选举人的观点被表示为网络中节点的状态（图 3 中的实心点和空圈），它们之间的相互关系可以用网络中的边（图 3 中的实线和虚线）来表示。

设想国会中有 N 个选举人投票，要从两位候选人中民主选举出一位总统，每个人都有自己属意的候选人。在正式投票之前，有一系列的协商或称为拉票的过程。规则是这样的：每个人都试图说服自己的邻居中一位观点相反的人改投自己所中意的候选人的票。交谈对象可以有两种反应：（1）被对方说服，改变原来的观点。（2）被对方喋喋不休的劝说弄得很烦，不再理他，而转身去找一位与自己观点一致的人交谈。这样的简化模型可以用一个在耦合演化的网络上选举人模型来描写。瓦兹奎兹 (F. Vazquez) 等人于 2008 年发表在《物理评论快报》的论文中建立了耦合演化的选举人模型。

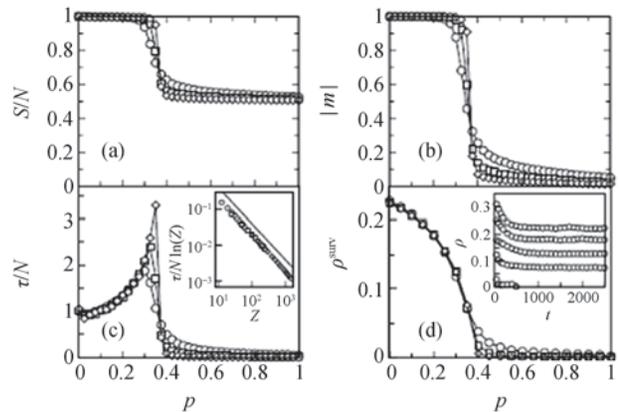
所谓耦合演化，是指网络中节点的状态和网络的拓扑结构都随时间变化，而且彼此之间有反馈作用。在选举人模型中，耦合演化包括节点状态的翻转和断边重连，分别对应于交谈对象的两个不同反应。如图 3 所示，网络由 N 个节点组成，每个节点的状态 s 为 +1 或者 -1。初始时刻，处于 +1 态和 -1 态的节点总个数各为 $N/2$ 。每个节点随机地挑选 μ 个节点作为邻居，形成一个度一致的随机网（随机网是指每一对节点都以一定的概率 p 随机连边的网络，度一致是指每个节点的连边数都相同）。这样，网络中总的连边数目就是 $\mu N/2$ 。如果一条边两端节点的状态不同，则称为活性边；用网络中的虚线代表；如果相同，则称为惰性边，用实线来表示。以图 3 为例，节点 i 与它的


 图3 选举人模型的耦合演化规则和活性边密度 ρ 的相应变化量

k 个邻居构成一个更新组。在每个演化时步，随机选择一个节点 i (状态记为 S_i)，和它的一个邻居节点 j (状态记为 S_j)，如图3左边小图箭头所指)：(1) 如果 $S_i=S_j$ ，则不发生任何变化；(2) 如果 $S_i \neq S_j$ ，则随机选中节点 i 的活性边的概率是 n/k 。其中， n 是 i 的相反观点邻居数目， k 是它的度，也就是最近邻总边数即邻居数。以概率 p ， i 断开一条与 j 相连的活性边，并随机选取一个非近邻的同态节点 a ($S_a=S_i$) 相连(图3右上角箭头所指)；或者以概率 $1-p$ ， i 翻转为 j 的状态(图3右下角)。图3中式子给出了活性边密度 ρ 在两种情况下相应可能发生的变化情况， m 是从中心节点 i 看到的同为向上节点对的数目。而图4中 m 表示节点 i 的连边中(++)边与(--)边密度的差，称为“边磁化强度”，其中 $S_i=s$ ， $S_j=-s$ ，($s=\pm 1$)， Δm 是它的改变量。

瓦兹奎兹等人通过数值模拟研究了有限尺寸 ($N=250、1000、4000$) 下的度规则随机图耦合演化到稳态的特性，如图4所示。从图4(a)、(b)可以看出，当 $p < p_c$ (临界值 $p_c=0.38$) 时， S 很接近于网络尺寸 N ，网络中总的边磁化强度 m ($m = |\rho_{++} - \rho_{--}|$) 的绝对值 $|m|=1$ ，这表明网络是由几乎所有节点互连的一个单独的组元，组元内节点态相同，都为 +1 或都为 -1。这可以直接对应于伊辛模型的铁磁态。当 $p > p_c$ 时，网络破碎成两个不相连的大组元，组元的大小近似等于 $S=N/2$ (图4(a))，每个组元内节点态相同，但是，两个组元的“磁化”方向相反。当系统尺寸

$N \rightarrow \infty$ ，边磁化强度的绝对值 $|m| \rightarrow 0$ (图4(b))，可以直接对应于伊辛模型的顺磁态。图4(c)表示，在相变点 $p_c=0.38$ 附近，网络耦合演化的平均收敛时间 τ (从平均度相同但初始连边构型不同的网络和不同的节点状态分布演化到冻结态，即节点状态和网络构型都不再变化的状态所用的平均时间) 是发散的，非常类似于伊辛模型中比热 C_H 的行为(图2(b))；图4(d)表示能够成功演化的系统中稳态活性边(+-边)密度 ρ^{suiv} 在 p_c 处从非零连续下降到0，网络发生破碎相变(网络从所有节点都互连接状态出发，在一定的参数条件下演化后破碎为若干个碎块)。


 图4 耦合演化选举人模型的稳态特征量随断边重连概率 p 的变化关系。(a) 网络最大组元的平均相对尺寸 S/N ，(b) 边磁化强度 m 的绝对值，(c) 网络耦合演化的平均收敛时间 τ ，(d) 活性边密度 ρ^{suiv} 随断边重连概率 p 的变化

耦合演化选举人模型的社会意义十分明显。如果每一位选举人在协商中能表现出足够的弹性（断边重连概率 $p < p_c$ ，容易被对方说服，而不是愤然绝交），则协商持续进行，可以达成共识（ $|m|=1$ ）。但是，如果选举人们弹性不足（断边重连概率 $p > p_c$ ，不容易被对方说服，容易愤然断交），则由于活性边（+ 相连）的密度趋于零，网络分裂成势均力敌的两派，二者不发生任何沟通，各执己见，无法达成共识（ $|m|=0$ ）。许多群体事件、种族冲突就是这样酿成的，应当尽力去避免系统向这个状态演化。

2. 反选举人模型 (IVM)

在实际的社会网络中，人们并没有看到许多的破碎相变发生。相反，网络始终保持整体性，但是它的运行效率千差万别。反选举人模型描述与选举人模型相反的扩展了的动力学过程，在这种模型中，每个节点都倾向于和邻居节点的状态相反。这种反向过程可用于研究一类需要相反状态节点直接联系来实现功能的系统。例如，在传染病流行中，只有当无病者接触了病人，传染才会发生。在股票交易市场中，只有当卖家给出了买家中意的价格，交易才可能发生。对于移动通讯网络，如果两个节点都在讲话，或者都在听，通讯就不能有效地进行；而一个讲话另一个听，才能正常地传递信息。在突触可塑的神经网络中，只有当两个神经元一个处在高电位，另一个在低电位，才会产生放电电流。在这些系统中，我们可以称病毒传播、买卖交易、信息传递和电流等现象为网络的功能流，网络的功能只能由两端节点状态相反的连边来实现。相应的复杂网络可以叫作流网络。

耦合演化网络的反选举人模型（朱陈平等，《物理快报 A》）第一次出现在 2011 年。在这种模型中定义网络的惰性边为 +1 态节点与 -1 态节点之间的连边，活性边为 “++” 连边或者 “--” 连边。演化规则仍然是节点状态翻转和断边重连两种，但是，为了描写实际问题中惰性边承担网络功能的事实，模型倾向于产生更多的惰性边。并且，直接定义惰性边的密度为流网络的效率。数值模拟和平均场解析推导都发现，反选举人模型的网络耦合演化不会出现破碎相变。但

是，节点个体状态翻转强度 β 和网络的平均度 k 扮演了决定性的作用。对于足够稀疏的网络（ $k \ll \ln N$ ），不管翻转的概率多大，网络都能够工作在满效率状态。而对于不够稀疏的网络，只有翻转概率相应地变小，网络才能工作在满效率状态。对于密集网络和大的翻转概率（ k 大， β 大），网络只可能工作在低效率状态。用翻转强度 β 的幂指数对平均度 k 和活性边密度作重新标度，他们求出了流网络活性边密度满足的普适性统计规律。为什么社会网络乃至大多数实际的复杂网络都是稀疏的而又不破碎？反选举人模型第一次正确给出了网络效率对网络稀疏性的一种定量依赖关系，对于探讨稀疏性的来源作出了贡献。

3. 混合选举人模型 (MVM)

混合的选举人模型是由正常选举人节点（实心三角形）和反选举人节点（空心三角形）混合而成的。三角尖端向上或者向下分别表示两种不同的意见。在网络演化的过程中，节点类型不发生变化。节点之间的连边是否活跃取决于从左右哪一边的节点来观察，连边类型如图 5 所示。当两个节点都是选举人节点时，两个节点之间的连边类型遵循选举人模型的定义，当两个节点都是反选举人节点时，节点之间的连边类型遵循反选举人模型的定义，当两个节点的类型不同时，两个节点之间的连边是否是活跃的，取决于采取哪一边节点的看法。在图 5 中，从节点出发的箭头代表这个节点对连边类型的看法。图中红色实线代表活性边，蓝色虚线代表惰性边。由于在选举人与反选举人两种模型中关于活性边和惰性边的定义是相反的，所以，

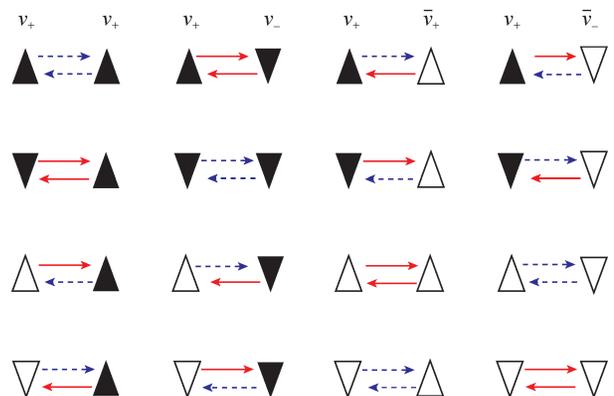


图 5 混合选举人模型中的不同连边类型

同一对个体之间的关系，如果这两个个体类型相反，看法就相反。例如，左上角四组小图与右下角四组小图，在选举人看来是惰性边（蓝色边）的（如，第一行第一列，两个个体都满意，不想再变），在两个反选举人（第三行第三列）看来，就是活性边（红色边），二者都想翻转或者重连构成相反的关系，即构造惰性边。又例如，第一行第三列，两个个体的意见相同，在左边选举人（实心三角形）看来，他满意，不想变，认为这是惰性边（上面的蓝线），而在右边的反选举人（空心三角形）看来，这是活性边（下面的红线），他不满意，想要翻转或者重连，构造出相反的关系。当自己有机会决定时，（如图2中节点*i*所示），他就按照自己的节点类型，采用翻转或者重连的操作构造出惰性边。定义正常选举人节点比例为 r 。当 $r=1$ 时，得到选举人模型；当 $r=0$ 时，得到反选举人模型，但是不包含上一节模型中的参数 β 。网络中每个节点的态为+1（正三角形）或-1（倒三角形）。

取不同的选举人节点概率 r 和断边概率 p 进行数值模拟，结果显示，活性边密度 ρ 随断边概率 p 发生连续相变，如图6所示。 $r=1$ 时，网络为选举人模型，稳定态活性边密度 ρ 随断边概率 p 的变化发生连续相变，临界值 $p_c=0.383$ 。 $r=0$ 时，网络成为反选举人模型网络，相变临界值 $p_c=0.383$ ； $r=1/2$ 时，网络中选举人节点和反选举人节点各占1/2，临界值 $p_c=0.790$ 。

图6描写具有不同的 r 和 p 的混合选举人模型演化到稳定态时网络的结构特征。当 $r=1$ ， $p < p_c$ 时，网络演化为一个大的集团，集团中节点态有+1和-1两种，集团中活性边（红色）比例和惰性边（灰色）比例都不为0（图6（a））；当 $r=1$ ， $p > p_c$ 时，网络破碎成两个不相连的集团，集团中的节点态全为+1或全为-1，活性边比例为0（图6（b））；当 $r=1/2$ ， $p < p_c$ 时，网络演化为一个大的集团，集团中存在+1态和-1态的选举人节点和反选举人节点，存在三种连边，分别为对两个节点都是活性边的连边（红色），只对其中一个节点是活性边的连边（蓝色），对两个节点都是惰性边的连边（灰色）（图6（c））；当 $r=1/2$ ， $p > p_c$ 时，网络破碎成三个集团，其中一个由+1态和-1态的反选举人节点组成，一个由+1

态的选举人节点组成，另一个由-1态的选举人节点组成，三个集团中都只存在对两个节点都是惰性边的连边（灰色）（图6（d））；当 $r=0$ ， $p < p_c$ 时，网络演化为一个大的集团，由+1态和-1态的反选举人节点组成，集团中活性边（红色）比例和惰性边（灰色）比例都不为0（图6（e））；当 $r=0$ ， $p > p_c$ 时，网络演化为一个大的集团，由+1态和-1态的反选举人节点组成，集团中活性边（红色）比例变为0（图6（f））。

混合选举人模型揭示了选举人/反选举人模型之间的共同性质，给出了介于两个极端情况之间的过渡模型，从而给出了社会网络中两态问题（两种对立观点）演化过程的更多途径。比起前两种模型来，它更接近真实的社会现实。它定量地给出了出现意见不同但是个体之间能和谐共存（图6（a）、（c）和（e））的条件，也揭示了出现极端情况（图6（b）和（d）），网络破碎，（f）节点之间关系冻结，网络失去演化动力）的条件。对于调节实际社会关系很有参考价值。

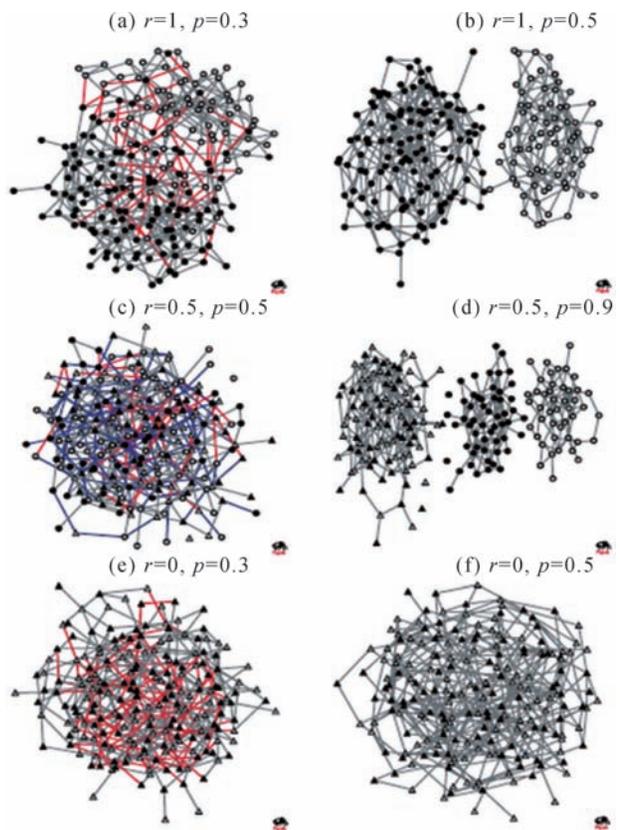


图6 混合选举人模型稳定态的网络结构

三、选举人、反选举人和混合选举人模型的实际应用

伊辛模型虽然看似简单，但是，在实际应用中却可以有很多种变化。如果研究模型取的恰当，甚至可以成功预测实际社会网络中的现象。民主投票的基础原则是假设总是存在多数派，即使只是多出几个百分点。如果投票结果是百分之五十比百分之五十，这在统计学上和社会学上听起来都是不可能的，尤其是当涉及到数以百万计的选民时。但是，在最近西方国家的选举中，却出现了一系列这种似乎不可能的均衡的投票结果。一个典型的案例是2006年4月的意大利大选，民意调查结果预计是普罗迪（Prodi）组阁获得一个坚实的胜利，而贝卢斯科尼（Berlusconi）组阁落选。但是，实际结果却是一半对一半的选票，普罗迪组阁仅以0.07%的差异获得胜利。事实上，这种类似的情况在一些西方民主国家已经发生了好几次，比如2000年美国大选，布什（Bush）最终仅仅以0.5%的差异战胜了戈尔（Gore）。这些结果不论是从选举人、反选举人和混合选举人模型出发求解都是可以获得的。

塞尔格·格兰姆（Serge Galam）在多数派原则中引入了反选举人。一个反选举人在局部区域通过多数者原则达成共识后，翻转自己的意见与多数派相反，当反选举人的比例达到一定数值后，会使系统最终演化成百分之五十比百分之五十的状态。塞尔格·格兰姆等人建立他们的社会物理学模型，在2005年首次成功地预测了一个非常不可思议的政治投票结果，这个预测提前实际投票几个月，并且和民意测验以及其他所有的预测都不同。这个模型强调了两态意见动力学模型中少数派意见的传播效应。它适用于大范围的问题，包括国家投票，吸烟与不吸烟行为的变化，对采取军事行动（比如伊拉克战争）的支持或反对，谣言的传播和改革的建议，等等。

在多数派原则混合选举人模型中，如果限制反选举人行为只出现在当前多数集体中，就会使系统的动力学出现复杂而奇特的功能。在这个模型中，反选举人与正常选举人没有区别，遵守局部更新规则，但是，一旦其离开了当前更新组，就会翻转自己的状态，而且反选举人不是永久的，每个选举人都会以一定的比例 a

表现出反选举人行为，而以比例 $1-a$ 表现出选举人行为。当反选举人只出现在某一状态的群体中，并且反选举人行为概率 $a < a_c = 1/9$ 时，系统最终演化结果将会是一个具有50%~50%意见比例的参数区域，或者是多数胜于少数的两个参数稳定点。尽管这种机制还不能详尽地解释选举活动中选举意见的形成，但是，它显示的一些特性或许可以对进一步研究一些令人惊讶的选举结果提供帮助。例如，2000年美国大选和2002年、2005年德国大选的出人意料的几乎平局的结果，以及2002年法国大选中以近乎80%的多数派获胜的结果。

四、超越伊辛模型的发展

我们通过列举与统计物理中伊辛模型相似的三个非平衡过程，给出耦合演化的稳态结果及其社会意义，介绍了社会物理学最简单的方面——观点动力学概貌。其实，从伊辛模型生发、衍生和发展出来的社会物理模型还有很多。比如，有向网络上的选举人模型、多数派规则模型、具有极少数坚定节点（任何情况下决不翻转）的选举人模型，“优柔寡断”的选举人模型、有记忆的或者有“惯性”的选举人模型都是两态节点的动力学模型。鉴于两态模型有时候不足以描写真实问题的特点，研究者们还引入了具有中间派的A-AB-B模型。为了反映社会个体的多重属性，研究者们还发展了多分量的节点性质模型，它们的耦合演化可以产生更加丰富的结果，描写社会复杂系统精彩纷呈的现象。一个较为全面的社会动力学综述文章，已经由卡斯特兰诺（Castellano）完成，发表在2009年的《现代物理评论》杂志上。

应当指出，网络上的演化博弈可以看成对社会、生态、技术等各个领域不同策略问题的抽象模型。当网络节点是人或者社会个体，这些博弈模型也对社会物理学有显著贡献。此外，21世纪兴起的人类行为动力学研究，无疑也应当属于社会物理学的范畴。

从伊辛模型衍生出千姿百态的社会物理学模型的过程，是研究者们把统计物理的思想和方法渗透、拓展和应用于社会领域的成功实践。伴随着交叉科学的兴起和发展，可以预见，随着越来越多的社会调查、社会统计数据的揭示，特别是因特网上更多实际数据的存储、整合与流传，社会物理学将会迎来它飞跃发展的时代。