复杂网络可控性的研究概况

聂　森　王旭文　汪秉宏

（中国科学技术大学近代物理系　230026）

引　言

近年来，随着复杂网络研究的不断深入，人们越来越关注于对复杂网络终极目标的探索，即如何对复杂网络进行控制。如同一辆构造精密且复杂的汽车，人们对汽车的驾驶和操控只需通过档位、油门、刹车和离合这样几个简单的部件即可（如图 1 所示），那么对于一个节点连边众多的网络，我们也希望通过少量的外界输入来控制整个网络的运行状态，使网络的运行结果为我们所用。例如在电力网络中，如何对个别节点进行外界输入来达到调控整个网络的性能；在基因网络中，如何有选择地对某些节点进行外界输入或者干预来达到调控整个基因网络，从根本上实现对一些疾病的治愈等。

虽然传统的控制理论对于系统的可控性能研究已经较为成熟，但是对于复杂网络这样一个庞大的系统进行精确控制还是一件非常困难的事情。虽然实际的复杂系统大多数都是非线性的，但是这些非线性的系统与其线性化系统是结构相似的。因此，复杂网络的研究者们开始着手于将传统的控制理论与复杂网络的研究思路相结合，深入并细致的进行复杂网络可控性能的研究。

网络可控性的概念

对于一个复杂的系统来说，我们可以利用网络的概念对其模型抽象化。用节点代表其中的各个组成部分，用节点间的连边代表系统中个体的相互作用关系。这样，即可把一个系统用网络的形式表示出来。对于一个给定的线性定常系统，我们将其结构抽象成网络模型如图 2 所示，图中的四个圆圈（节点）代表了系统的四个组成部分，其中 x_1，x_2，x_3，x_4 分别代表着四个组成部分的运动状态，而节点间的连边则表明系统中各组成部分之间有相互作用，连边的权重 a_{21}，a_{41}，a_{31}，a_{34} 一般代表着节点之间相互作用的大小或者重要性，每个节点的连边数为该节点的度。外界的输入 u_1，u_2 分别通过 1 和 2 节点对系统进行控制。如果系统对任意给定的初始状态 x_0 和任意给定的终态 x_f，在输入 u 的作用下，在有限时刻 t 内达到 $x(t)=x_f$，那么这个系统是可控的。

系统的动力学方程为：

$$\dot{x}=Ax+Bu\,,\ x\in R^N,\ u\in R^N, \tag{1}$$

其中，$x(t)=(x_1(t), \cdots, x_N(t))$ 是规模为 N 的系统在时刻 t 的状态，$A=(a_{ij})_{N\times N}$ 为系统矩阵，表明了系统中个体间的相互连接关系，如果个体 i 和个体 j 之间有连边，

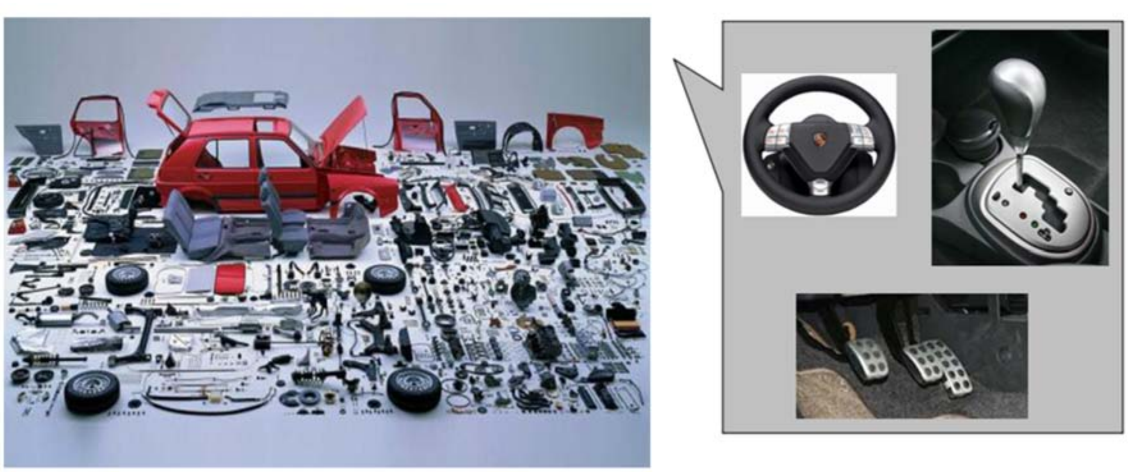

图 1　复杂系统（汽车）的外界输入

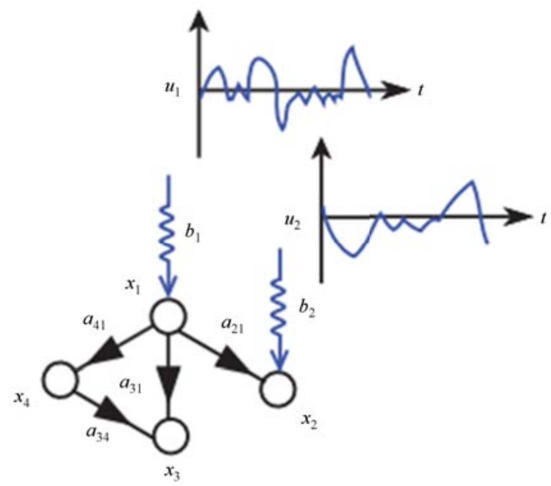

图 2　线性系统外界输入结构示意图

则 a_{ij} 数值大小为边的权重，否则 $a_{ij}=0$；$B=(b_{ij})_{N\times M}$，$M\leqslant N$ 为输入矩阵，表明了外界的输入信号如何控制作用于网络中的节点。图 2 中的系统矩阵 A 和输入矩阵 B 分别如下所示：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a_{21}&0&0&0\\a_{31}&0&0&a_{34}\\a_{41}&0&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}b_1&0\\0&b_2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}。$$

结构可控性

在传统的控制理论中，我们通常利用卡耳曼秩判据来判断一个系统是否可控。对于线性时不变系统（1）：

$$C=[B, AB, A^2 B, \cdots, A^{N-1}B], \qquad (2)$$

$$\text{rank}(C)=N。$$

若卡耳曼矩阵 C 满秩，则该系统可控。该判据为我们判据系统的可控性能提供了理论方法，但是对于大规模的复杂网络而言，计算卡耳曼矩阵 C 的秩是一件比较困难的事情。首先，对于系统矩阵 A 中每一元素 a_{ij}，即网络中的边权数值难以获悉；其次，即使我们获知了所有的边权，计算复杂度也十分的高，难以实际应用。因此，对于复杂网络可控性的研究可以简化为结构可控性的研究。

林庆泰（Ching-Tai Lin）在 1974 年首次提出结构可控性的概念。结构可控性是指，若存在权重非零的矩阵 A 和 B 使得卡耳曼判据成立，那么对于矩阵 A 和矩阵 B 中不同权重的组合方式，除了全零状态及一些病态情况，系统几乎都是可控的。满足这样情况的系统我们称之为结构可控系统。如下图 3 所示，其中（a）系统为结构可控系统，而（b）系统则无法满足结构可控，其权重的组合方式是病态的。图（a）满足卡耳曼可控秩判据，除非边权为零，否则矩阵 C 满秩，而图（b）中边权的大小无论怎样选取，矩阵 C 始终不满秩，系统不满足结构可控。

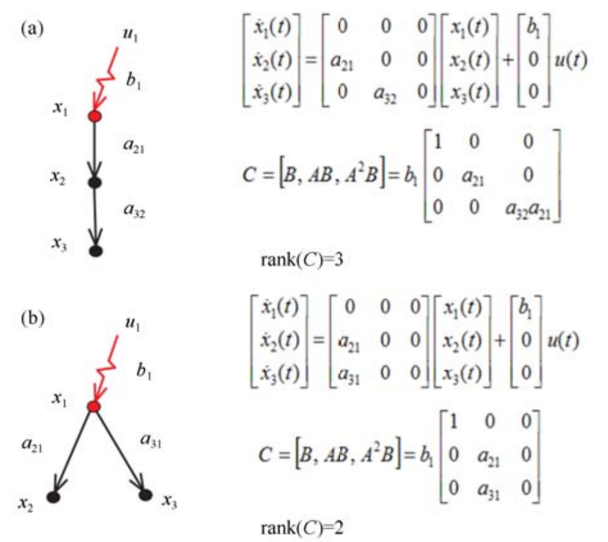

图 3　具有外部输入的系统结构可控性示意图

结构可控性大大降低了实际计算难度，使得基于卡耳曼秩判据的网络结构可控性研究得以实现。

最大匹配与最少外界输入

对于一个复杂的网络来说，我们想要通过外界输入将其从任意初始状态控制到任意的目标状态，那么我们首先需要保证的是网络中每一个节点的状态都能够被我们所控制。因此，我们需要确保外界的输入能够传递到每一个节点。如同一堆缠绕在一起的多根毛线，我们应该如何寻找到这些毛线的线头，从而理清其中的曲折呢？

2011 年，刘洋宇等人在复杂网络可控性方面做出了开创性的工作，他们将网络的可控性简化为判定网络的结构可控性，即只关注系统内部的结构框架、节点间的连接方式，忽略网络中系统矩阵的边权。基于图论的研究背景给出了寻找一个网络能控所需的最少外界输入数目的方法，并得到了最少外界输入的解析数值。他们发现有向网络中需要外界输入的节点数目主要由网络的度分布决定，而确定一个有向网络最少外界输入的问题则可以转化为求解该网络的最大匹配

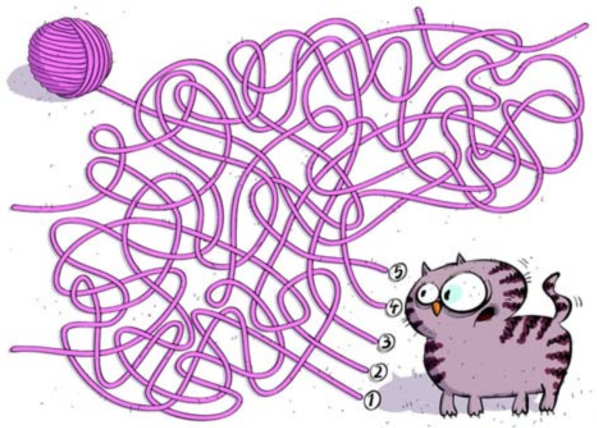

图 4　寻找网络的控制源头

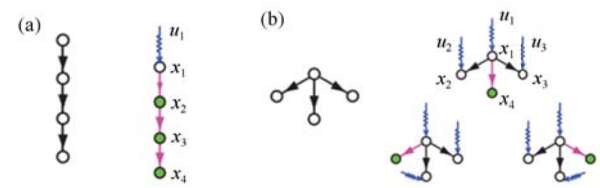

图 5　系统最大匹配与最少外界输入示意图

问题。

有向网络 G 中边的子集为一个匹配，该匹配中所有的边没有公共的起始或者终止点，其中边数最多的匹配为最大匹配。若最大匹配中的边指向一个节点，则定义其为匹配节点，否则为未匹配节点。一个网络的最大匹配可以有多种形式，但是最大匹配集中边的数目是固定不变的。对于网络来说，未匹配节点的数目即为网络获得完全可控所需要的最少驱动节点数目，通过对未匹配节点进行控制，外界输入会经过有向路径传递至网络中的所有节点，进而实现网络的完全可控。因此，我们称这些未匹配的节点为驱动节点。对一个网络来说，其最大匹配的选择方式可能是较多的，因此网络的驱动节点集合也可以有多种组合形式。由于最大匹配集的边数不变，因此驱动节点的数目固定。如图 5 所示，（a）、（b）分别为两个简单系统的最大匹配与最少外界输入。其中，红色连边为最大匹配集中的边，绿色节点为匹配节点，空心节点为未匹配节点，即驱动节点。系统中每个节点均有独立的上级节点，外界输入作用于驱动节点从而控制整个系统。在图 5（a）中，左图为系统示意图，右图标明了该系统的最大匹配集及最少外界输入，该系统的最大匹配集仅有一种选择方式，而对于图 5（b），该系统最大匹配集的选取有 3 种不同的方式，如右图所示。在不同的最大匹配集选取下，系统对应的最少驱动节点也有所不同，但是其数目固定。最少驱动节点的数目通常可以作为一个指标来衡量系统的可控性能。

相关研究与展望

本文主要介绍了复杂网络结构可控性的相关概念和研究方法。由于结构可控性忽略了网络中的边权且只能计算有向网络的最少外界输入，在后续的工作中，王文旭等人又提出了严格可控性，可以解析计算出具有任意结构和边权的网络的最少外界输入，使得网络可控性的理论更加完备；孙杰等人又研究了系统实际控制中的问题，考虑了系统实际运行中的路径、能量消耗以及工程计算等问题，将理论研究进一步推进实践。除此之外，大量的研究关注于网络的能量消耗，拓扑结构分析，网络的可控性能与鲁棒性能之间的关系等方面，从各个角度分析并挖掘了网络结构可控性能的内容，使得我们的理解不断加深。

复杂网络可控性的研究已经成为复杂网络中的一个热点问题，研究方向也已经从单纯的关注网络可控所需的最小输入节点数目扩展开来，人们开始关注多层网络、时变网络、生物网络，以及实际控制系统等更多元化的研究内容。我们研究复杂网络的最终目标就是要实现对网络的调控能力，因此，如何能够将现有的研究内容和结果应用于实际的控制系统必将成为未来复杂网络可控性能的发展目标和方向。