

## 从单层网络到多层网络

### ——结构、动力学和功能

陆君安

(武汉大学数学与统计学院 430072)

在 20 世纪末,小世界和无标度网络模型的提出,打破了人们习惯性地用随机图来描述现实中的复杂网络的传统思维,确立了复杂网络研究的标志性里程碑。自然和社会中存在着大量复杂系统,如 WWW、Internet、通讯网络、电力网络、生物神经网络、新陈代谢网络、科研合作网、演员合作网络、社会关系网,等等,尽管看上去各不相同,但是它们有着惊人的相似之处,概括起来,复杂网络有以下几个主要特征:

① 网络的规模巨大:现实网络的规模通常都非常大,节点数目一般在几万、几十万到几亿、几十亿,因此研究如此“海量”节点的网络,需要寻找更好的方法和模型来刻画。

② 稀疏性:现实网络中各个节点之间的连接通常都比较稀疏,统计告诉我们大多数真实网络的边数大约是节点数  $N$  的线性阶,即  $O(N)$  阶,譬如几万个节点的网络,它的边数一般在几十万、几百万,而不像全连接网络是  $N$  的 2 次方阶。

③ 小世界特性:现实网络的平均路径长度都是很小的,所谓“六度分离”就是说虽然世界很大,但是世界上任意两个人平均只要通过六个关系就可以认识。而小世界的另外一个特性就是具有较高的聚类系数,它指出社会网络中一个人的朋友之间往往也是朋友,所以朋友圈是很容易形成的,这一点我们在使用微信中都会有体会。

④ 节点度(即节点的边数)的幂律分布特性:所谓网络的度分布就是网络节点具有不同边数百分比的分布,也就是随机选取网络中一个节点其度为  $k$  的概率。最近邻网络譬如环,每一个节点的度均为 2,所以它的度分布就是一个  $\delta$  “尖峰”函数。而完全随机网络的度分布接近于泊松分布,即网络节点的度数差

不多都在一个平均数的附近,而度数远离平均数的几乎不存在,这种完全随机网络在过去的几十年中是网络研究的主要模型。

到了 20 世纪末,巴拉巴希(Barabasi)等人发现了反映许多真实实际网络的幂律分布,他们在 1998 年开展对万维网研究,实测结果揭示了令人惊异的事实:万维网是由少数高连结性的页面串连起来的,80% 以上页面的连结数不到 4 个。然而只占节点总数不到万分之一的极少数节点,却有 1000 个以上的连结。后来在电影演员合作网络、科学引文网络等也有类似的幂律分布特征。幂律分布表示为  $P(k) \sim k^{-\gamma} (\gamma \geq 1)$ ,它的提出也是复杂网络进展中最引人注目的事情。它告诉我们网络节点的度数并不是都在一个平均数的附近,而是存在一部分度数非常大的节点(Hubs 节点),造成度数的极大差异,像社会上百分之几的极少数人却掌握了百分之几十甚至一半以上的财富。

最近十多年来,复杂网络研究已经成为科学和工程的前沿领域,取得许多重要的成果。但是直至目前复杂网络领域大多数的研究还是集中在单个网络(或者说单层网络)而忽略了实际复杂系统中多种网络相互作用的存在,譬如包括不同的运输工具(航空网、铁路网和公路网)的交通网络,包括物种的生态网络的交互网络和食物网,包括基因调控网络、代谢网络、蛋白质-蛋白质相互作用网络,等等。所以单层网络已经不能满足实际复杂系统研究的要求,为此,最近几年国际上提出“网络的网络(Network of networks)”、“多层网络(Multiplex network)”和“相互依存网络(Multiplex Networks and Interdependent Networks)”模型,成为当今复杂网络领域最前沿的重要研究方向之一。

# 统计物理与复杂系统研究前沿进展专题 II

现实中大多数复杂系统的节点具有多种功能，并且相互连接和作用，而这多种功能有质的区别，不能叠加，从而就构成了多层网络。下面我们先来看几个例子。图 1 是一个 3 层社会网络，3 层包括朋友网络（虚线）、家庭网络（实线）和工作关系网络（双线），这 3 种网络的边（关系）是具有不同性质的，同一个节点（人）在每一层中扮演不同的角色，因此不能把它看成单层网络。

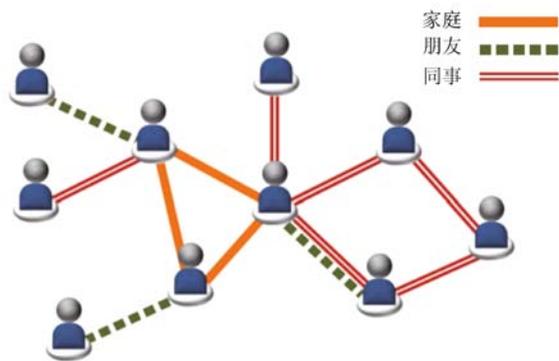


图 1 朋友、家庭和工作关系网络（引自 K.-M. Lee et al., Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity, Springer (2014)）

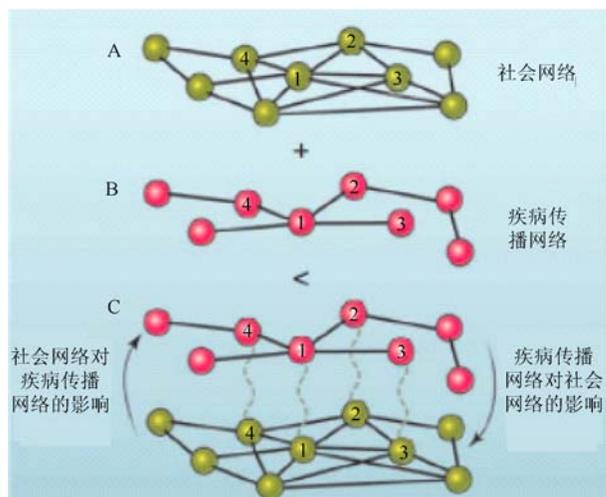


图 2 社会关系和疾病传播网络（引自 Chris T. Bauch' et al., Science(2013)）

流行病传播和信息传播是复杂网络上的两大基本传播过程，已有研究大多都是独立地分析这两个单层网络的传播机理。然而，实际中接触网络上的疾病传播和信息通讯网络上的关于疾病消息的传播，它们紧密相关并相互影响。而过去人们研究流行病传播虽然已经建立很多模型，但是都没有考虑社会网络中关于疾病传播的信息会影响流行病的传播。比如，大规模

的流行病爆发依赖于关于疾病消息的传播，尤其是流行病传播初期，个体意识到存在感染邻居将会采取措施保护自己，从而极大程度抑制了流行病传播。国外科学家曾分析了社会因素对流行病传播的影响，如图 2，A 是人们的社会网络，B 是疾病接触网络，C 是两层之间的相互作用网络，每一个人都是这种两层网络中的个体。这种两层网络表现出极其复杂的动力学效果，人们对疫苗的接种是否有利于降低流行病的认识，会极大地影响疾病的传播，譬如一个社会知名人士说某种疫苗存在着风险，这会导致疫苗接种率的下降从而引起流行病的蔓延。人们发现疾病接触网络上的流行病爆发会引发社会网络上的消息爆发，而消息的传播会增加疾病的爆发阈值，从而阻碍疾病的传播。所以在研究疾病传播时一定要结合社会对疾病消息传播，目前信息-疾病耦合网络、社会-生物传播系统已成为一个新的研究方向，它有助于进一步揭示个人、经济和社会等方面因素在流行病传播过程中的影响机制，为流行病预警和控制提供了理论指导。

图 3 给出了面对一场灾难的复杂系统的有效协调响应，需要整个基础设施网络提供至关重要的电力、水利、交通、通信、食品供应等，它们相互之间紧密依赖，加上政府、管理人员、医疗、药物等的配合，表现出多层次的复杂结构。这些基础设施之间有着复杂的关系，有多个连接，反馈和前馈路径，各种分支拓扑结构。所以现代的可靠运行必须依赖于计算机控制系统，由数据采集与监视控制系统，以保证整个复杂系统安全高效地运作。这是典型的系统的系统。

多层网络最典型最重要的例子应该是互联网与电



图 3 面对一场灾难的复杂的系统的系统（引自 K.-M. Lee et al., Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity, Springer(2014), 徐明明绘制）

网、电信、金融网络的耦合网络，譬如互联网以电网为支撑，而电网又通过电信网得到指令。电网、电信、银行全部登陆互联网，并在网上互通信息。美国曾经发生过一场事故，最初是由一台计算机使一部智能手机染上蠕虫病毒，然后感染了另外一些智能手机，接着传到了美国的计算机网上，在美国摧毁了通信网络，继而使电站无法工作，停电又使交通网络陷于瘫痪。这次病毒感染在不同网络之间来回传递，导致重大事故发生。因此可以说，各种网络的网络、形形色色的多层网络，在我们身边已无处不在，仅限于单层网络的研究已经远不能满足现实的需要，我们必须改变目前在多层网络方面的理论、方法和技术手段方面相对匮乏的局面。那么，多层网络的结构、动力学性质、脆弱性和鲁棒性等有哪些特点，比单层网络表现出哪些更为复杂的现象呢？下面我们从几个方面讨论，其中大多数都是最近几年开始研究探讨的问题，有的还处于待研究状态。

### 多层网络的结构

图 4 和图 5 是两层和 4 层网络示意图，每层的节点数目是相同的，但是各层有不同的拓扑结构，连接边可以是有向边或无向边、可以是加权边或无权边，而层间连接是沟通不同层的渠道，也可以是有向或无向、加权或无权。所以，当层内连接和层间连接关系给定后，多层网络的结构就完全确定了。我们知道，网络的结构（也就是网络各节点之间的相互作用关系）完全由网络所对应的拉普拉斯矩阵所决定。所谓拉普拉斯矩阵，它的第  $i$  行第  $j$  列元素就是网络的第  $j$  个节点对第  $i$  个节点的作用，在无权网络中，如果第  $j$  个节点与第  $i$  个节点有连接则矩阵的第  $i$  行第  $j$  列元素为  $-1$ ，否则为  $0$ ，并且保持矩阵的每一行元素之和为  $0$ 。这样，网络的结构就与矩阵一一对应了，而拉普拉斯矩阵在数学上这些非常好的性质，从而为研究网络提供了有力的工具。研究发现网络拉普拉斯矩阵的特征值，能够反映网络的某些重要的动力学（如传播、同步等）特性。下面我们来考虑一个  $M$  层每层  $N$  个节点的多重网络。

假设层间连接是相同的，无向全连接无自环。我们称整个多网络拉普拉斯矩阵为超拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}$ ，

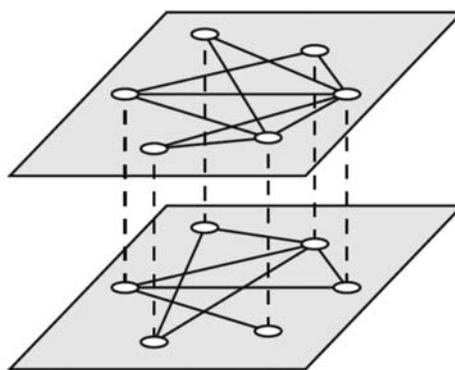


图 4 两层网络示意图（引自 S. Gómez et al., Phys Rev Lett. (2013)）

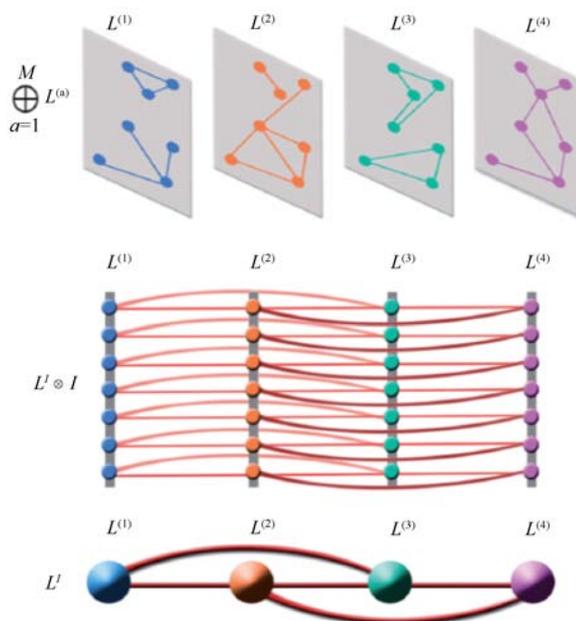


图 5 四层网络示意图（引自 A. Sole-Ribalta et al., Phys Rev E (2013)），其中上面图表示层内超拉普拉斯矩阵是各层的层内拉普拉斯矩阵的直和；中间图表示层间超拉普拉斯矩阵是层间拉普拉斯矩阵和单位矩阵的张量积；下间图表示层间的连接

它可以分解成层内超拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}^L$  和层间超拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}^I$  两部分：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^I,$$

其中层内超拉普拉斯矩阵是各个层内的拉普拉斯矩阵的直和

$$\mathcal{L}^L = \begin{pmatrix} L^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L^{(M)} \end{pmatrix} = \bigoplus_{\alpha=1}^M L^{(\alpha)}.$$

层间超拉普拉斯矩阵是层间拉普拉斯矩阵和单位矩阵

的张量积

$$\mathcal{L}^I = L^I \otimes I,$$

层间超拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}^I$  谱等于层间拉普拉斯矩阵谱  $L^I$  的  $N$  重。也就是说，层间拉普拉斯矩阵  $L^I$  的谱也是整个多层网络超拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}$  的特征值。这些就是分析多层网络结构和谱特性的最基本关系。

这些特征值一般不容易得到解析表达式，但是对于几种特殊情况是可以得到解析表达式。

### 多层网络的度分布

我们已经看到，网络的度分布对于网络来说是非常重要的。那么如何刻画多层网络的度分布呢？譬如两层网络都是 SF 网络（或者随机 ER 网络、小世界网络），或者两层是不同的网络，而层间连接可以是度正相关连接（两层网络度大与度大节点相互连接）、度负相关连接（两层网络之间度大与度小节点相互连接），也可以是随机连接，如图 6 展示随机连接、正相关和负相关连接。实际问题中最常见的是正相关连接，譬如在朋友关系 - 贸易网络中，往往社会关系多的人生意也做得大。研究这个问题需要概率统计中的多元随机变量及其分布，联合分布函数和边缘分布函数等方法。

### 多层网络上的扩散与同步

网络上的传播、扩散、同步等动力学行为是复杂网络研究的基本问题，特别是关于同步一直是人们关注的问题。关于两个振子的同步现象的发现可以追溯到 1665 年荷兰物理学家惠更斯（Huygens），他发现两个钟摆不管从什么不同的初始位置出发，经过一段时间以后它们总会趋向于同步摆动。后来 1680 年，同样是荷兰的旅行家肯珀（Kempfer）在泰国旅行，

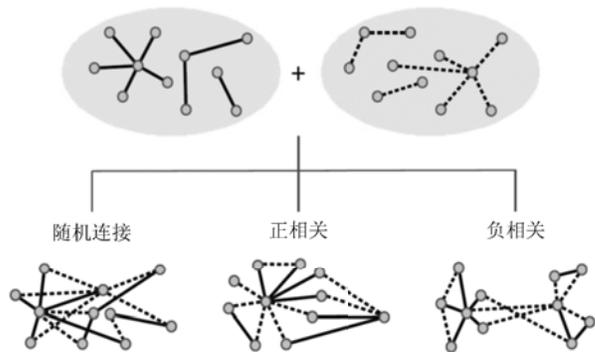


图 6 层间连接的度相关性（引自 K.-M. Lee et al., *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity*, Springer (2014)）

在湄公河上顺流而下时看到了成千上万萤火虫同步闪光的一种奇特的生物现象：这些成群成群的萤火虫，开始时杂乱纷纭地各自闪光，后来却会变得时而同时闪光，时而又同时不闪光，非常有规律而且在时间上很准确。今天，两个或多个系统的同步在核磁共振仪、信号发生器、颗粒破碎机、激光设备、超导材料和通信系统等领域起着非常重要的作用。同步现象也会是有害的，2000 年 6 月 10 日当伦敦千年桥落成时，成千上万的市民和游客开始涌上大桥庆祝，逐渐地引起这座近 700 吨钢铸大桥开始发生振动，桥体的摆动偏差甚至高达 20 厘米。Internet 上也有一些对网络性能不利的同步化现象。例如，Internet 上的每一个路由器各自都要周期性地发布路由消息，尽管各个路由器都是独立工作的，但是研究发现许多的路由器最终竟然会以同步的方式发送路由消息，从而引发网络交通堵塞。所以网络同步问题一直是人们的研究热点。

研究网络的同步很重要的任务就是要确定它的同步域，同步域可以分为无界、有界、多区域或者根本不能同步四种情况。为了衡量网络的同步能力，一般采用网络的拉普拉斯矩阵的最小非零特征值，以及最大特征值与最小非零特征值比  $R$ ，最小非零特征值越大则同步能力越强，最大特征值与最小非零特征值比  $R$  越小则同步能力越强，从而动力学扩散的时间尺度也越短。

先看看最简单的两层相同的星形网络通过层间一条边连接，一共有中心节点与中心节点连接、边缘节点与边缘节点连接以及边缘节点与中心节点连接三种情况。研究表明表明，度大节点与度大节点连接有更强的同步能力。这一点也是很容易理解的，两个系统要协同合作（同步），每个系统中最重要成员的相互连接是最关键的。

对于比较复杂的多层无标度网络，在层间强度比较小时，多层网络的同步能力正比于层间强度，扩散动力学的时间尺度反比于层间强度而越来越小，说明扩散变得容易；而随着层间强度的再增加，同步能力的提高变得缓慢，而扩散的时间尺度也不会过小。图 7 是由每层 200 个节点的 BA 网络耦合成的四层网络的最小非零特征值随层间强度的变化曲线。四层网络

的最小非零特征值在层间强度适当大之后，明显地大于单层网络的最小非零特征值，表明多层网络的同步能力远大于单层网络的同步能力。而对于同步域为有界情况，网络的过大或者过小的层间强度都不利于多层网络的同步，也就是有一个适当的最佳耦合强度使得多层网络同步能力达到最大（如图 8）。

对于不同性质的网络耦合成的多层网络，其同步性质会出现许多新的复杂的现象。人们研究了一维网络（每个节点只与左右四个邻居有连接）与 WS 小世界网络（具有少量“长程”边）耦合的两层网络（如图 9），其中这两个单层网络的平均度为 4，假设一维网络的层内耦合强度为  $J_1$ ，WS 小世界网络的层内耦合强度为  $J_2$ ，层间强度为  $J$ ，利用 Kuramoto 相同步模型通过平均场分析研究了  $J_1$ 、 $J_2$  和  $J$  对整个两层网

络的影响，发现在一维网络弱耦合  $J_1 \ll 1$  时， $J$  的增加反而抑制整个网络的同步，这是由于一维网络的异步阻碍了 WS 网络的同步。而当一维网络的层内耦合强度  $J_1$  增加到足够大时，使得  $J$  的增加促进 WS 小世界网络的同步，从而提高了整个两层网络的同步性。这些发现可以解释许多复杂现象。

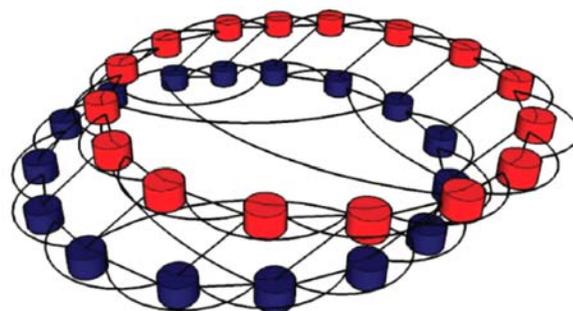


图 9 一维近邻网络（红色）与 WS 小世界网络耦合的两层网络（引自 Jaegon Um et al., Chaos(2011)）

### 多层网络的鲁棒性和脆弱性

现实网络由于度分布的极其不均匀性和 Hubs 节点（具有非常多边的节点）的存在，所以网络对随机攻击表现出鲁棒性（既然是随机攻击就很难击中 Hubs 节点），而对蓄意攻击表现出脆弱性（因为有 Hubs 节点存在，所以蓄意攻击就很容易让一个网络瘫痪），这是复杂网络极为重要的特性。对于多层网络，这种鲁棒性和脆弱性表现得更加明显，出现网络级联故障的现象，当然它受网络结构特别是层间耦合方式的影响。所谓级联故障现象，就是当故障在第一层网络中发生，会导致其他层网络节点的故障，反过来又进一步损害第一层网络，导致灾难性后果（雪崩）。图 10 给出层间正相关（MP）和负相关（MN）的多层网络的级联效应，所谓层间正相关就是某一层度大（小）的节点与其他层度大（小）的节点连接，反之称为层间负相关。当一个节点遭到攻击就删去这个节点的所有边，依次进行，发现正相关多层网络比负相关多层网络容易造成级联故障。图 11 为层间正相关和负相关的双层网络发生故障的鲁棒性和脆弱性，网络节点和边受到攻击（删除）时最大接通部分的比例为  $S/S_0$ ，网络层间是随机、正相关和负相关连接。（a）在随机失效和有意攻击被删除节点百分比  $f$ （横坐标）的情况下最大连通比例  $S/S_0$ （纵坐标），有意删除节点

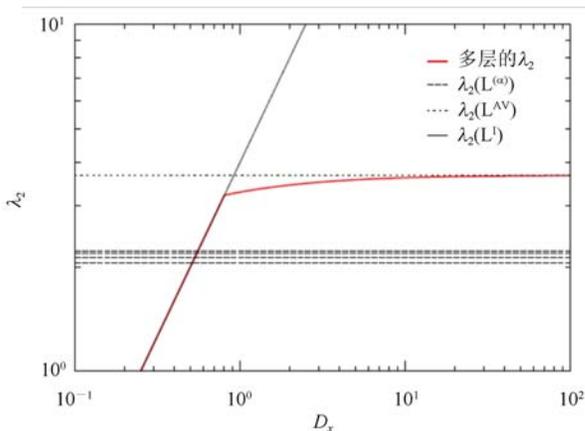


图 7 四层网络最小非零特征值随层间强度的变化（引自 A. Sole-Ribalta et al., Phys Rev E (2013)），其中横坐标是层间强度，纵坐标是最小非零特征值

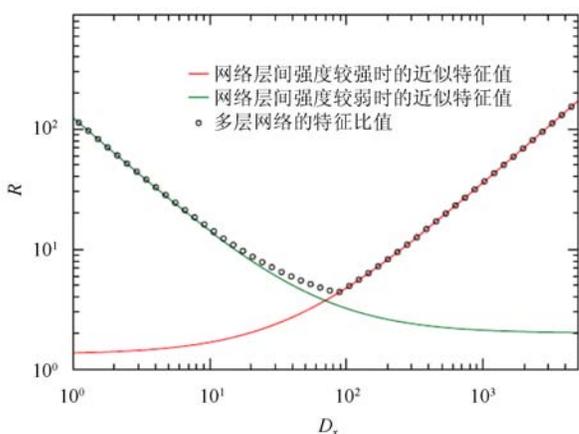


图 8 特征值随层间强度的变化（引自 A. Sole-Ribalta et al., Phys Rev E (2013)）

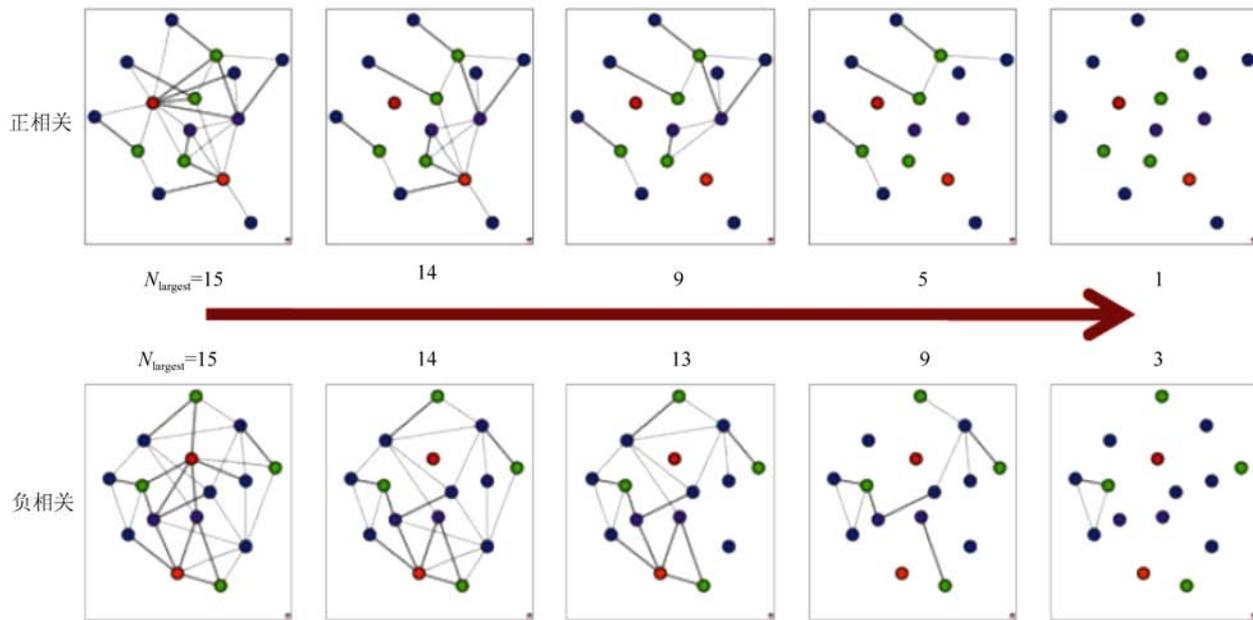


图 10 层间正相关和负相关的两层网络的级联效应 (引自 K.-M.Lee et al., Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity, Springer(2014))

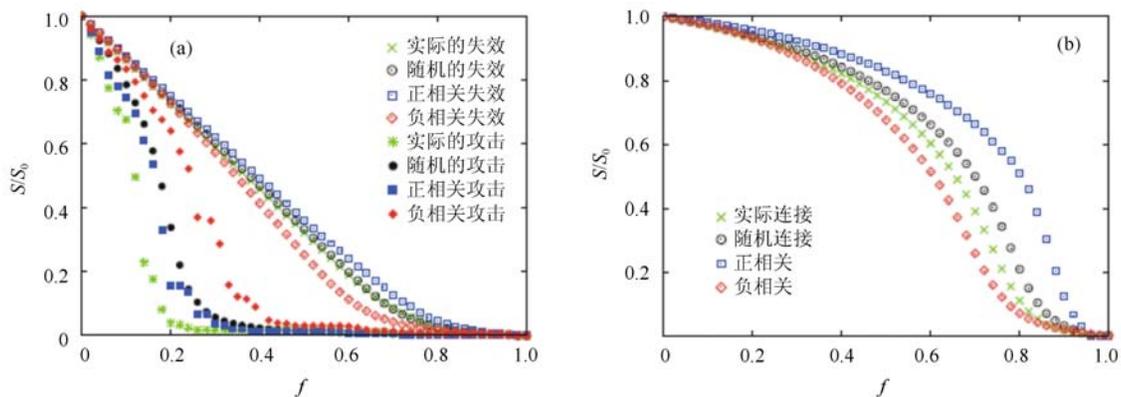


图 11 层间随机、正相关和负相关连接的多层网络的鲁棒性和脆弱性 (引自 K.-M.Lee et al., Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity, Springer(2014))

按度从大到小依次进行。明显地看出，在删除百分比  $f$  相同情况下，有意删除比随机删除造成最大接通比例  $S/S_0$  小得多，而且在有意删除情况下正相关连接的多层网络又比负相关连接的多层网络造成最大连通比例  $S/S_0$  小得多。(b) 随机删除边的情况。这些数据是经过 1 万次独立仿真平均获得的。

### 总结与展望

我们已经介绍了多层网络的一些最近研究进展，说明多层网络较之单层网络对于研究现实复杂系统来说是更加理想的模型，特别是多层 ER 小世界网络和

多层 SF 无标度网络更接近真实的复杂系统。它为探索大规模网络的动力学演化机制及重塑拓扑结构等问题奠定基础，为信息、生物、社会等众多学科提供新的视角和方法。这两年国际著名刊物发表多层网络方面的论文明显增加。但是，多层网络毕竟是这几年才刚刚兴起新的研究方向，系统建立它的理论和方法，拓广它的应用，还有很长的路要走，让不同学科领域的科学家共同努力吧。

致谢：本文得到国家自然科学基金(11172215, 61374173)项目支持