逾渗模型与复杂网络

李　明　汪秉宏

（中国科学技术大学近代物理系　230026）

DOI:10.13405/j.cnki.xdwz.2015.03.010

一、逾渗模型

将一个疏松多孔的材料放入水中，水能否渗入材料中呢？1957年，布鲁德本特（Broadbent）和哈默斯利（Hammersley）给出了一个简单的模型用以讨论这个问题，即所谓的逾渗模型（percolation model）。如图1所示，他们的模型建立在一个二维的方格子上。模型中的节点表示材料中的空隙。为了模拟材料中空隙的连通，假设方格子中相邻节点（每个节点有四个邻居）以概率 p（$0<p<1$）相连。模型中，一对相邻节点相连称为占据相应的边。如图1所示，如果只标出占据边，原系统就被分为若干个由占据边连接的节点集团，一般称为连通集团。一个连通集团中的节点数称为该集团的大小。如果水能渗入材料中，模型中必然会有一个与原系统大小相当的连通集团贯穿整个二维格子，这样的集团一般称为巨分量（giant component）。这样，水能否渗入材料的问题就简化为占据概率 p 与巨分量存在性的关系问题。

为了定量讨论逾渗模型，首先需要区分系统中有无巨分量的两种状态，进而才可以讨论两种状态随参量 p 的变化关系，即相变。我们知道统计物理中的相变只会发生在一个无穷大的系统中，所以对于逾渗模型的理论讨论也同样要求系统为无穷大。试想在图1所示的小系统中，即使用一个很小的占据概率 p（大于0），节点也可能大部分连通。但是，一旦将系统增大，这种偶然连通的影响就会减小。类似于做统计分析时，样本越大，偶然因素对统计结果的影响越小，结论越精确。那么，在同一个 p 值下，不同尺度系统有什么特点呢？我们在图2中给出了研究人员发现的现象的示意图。当 p 较小时，连通集团的数量随系统尺度的增大而增多，但是其平均大小并无同量级的明显增大；而当 p 较大时，系统中会有一个连通集团随着系统尺度增大而同量级的增大，即系统的巨分量。这样，可以利用如下的量区分系统有无巨分量的两种状态，即逾渗相变的序参量定义为

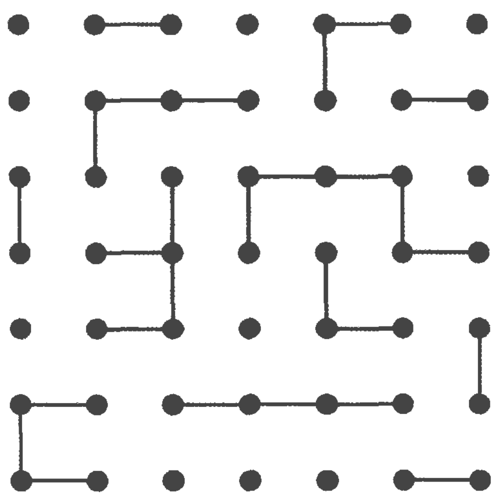

图1　逾渗模型示意图。在一个方格子中以概率 p 占据边。图中未被占据的边未画出。图中占据概率约为1/3

$$S=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}$$

其中，N 为系统大小，即总节点数，n 为最大连通集团大小。由图2，我们可以看出这样定义的合理性：当系统中无巨分量时，系统中的连通集团大小都为一个有限值或量级低于 N，序参量 S 显然为0；当系统中存在巨分量时，系统中有一个连通集团（即巨分量）会随着 N 的增大而同量级增大，N 趋于无穷大时，S 为一个定值（$0<S<1$）。由此可见，S 取值的非零与否即可区分系统中是否存在巨分量，这也符合相变理论中序参量选取的基本要求。图2中的这种系统结构特性随系统尺度变化的自相似性质也是物理学中的一个重要分支——分形。分形的主要研究对象是自然或数学中的一些不规则几何形态。从整体上看，分形几何图形是不规则的，而在不同尺度上，图形的规则性又是相同的。这些图形从整体到局部，都是自相似的，具有非整数的维度，常用来描述混沌和非线性系统。

在图3中，我们给出了不同系统尺度下，序参量 S 随控制参量 p 的变化曲线。可以看出随着系统尺度

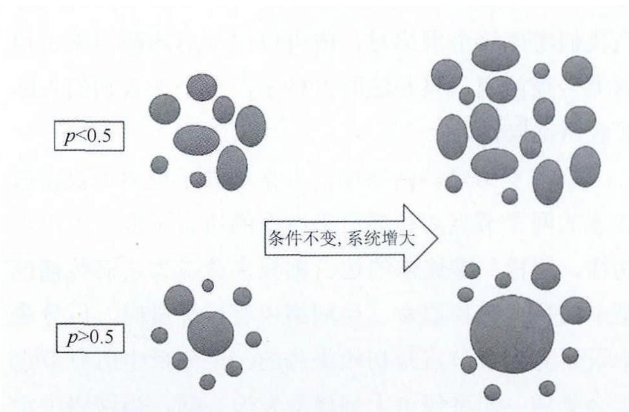

图 2　逾渗模型中连通集团随系统尺度变化示意图。图中用不同的圈表示系统中的连通集团，孤立节点未画出

N 的增大，序参量 S 由零值变为非零值的临界点 p_c 趋近于一个定值。利用对偶变换，我们可以求出对于无穷大的系统，该值为 p_c=0.5。由图 2 所示的两种情况，我们也可以想到，系统中的第二大集团大小 n_2 会在临界点 p_c 处取得最大值。这一特性可以用来在模拟中找到系统的临界点。在图 3 中我们也给出了 N=160×160 的情况下，n_2 随 p 的变化关系，可以看出 $p_c \to 0.5$。

以上讨论的逾渗模型一般称为键逾渗（bond percolation）。在同样的方格子系统中，还有另一类逾渗——座逾渗（site percolation）。所谓座逾渗，即在方格子中以概率 p 随机占据节点，也可理解为以 1-p 的概率删除节点，然后类似的考察剩余节点的连接情况。与键逾渗的现象类似，随着占据概率 p 的增加，系统也会出现一个巨分量（见图 4）。方格子上的座逾渗至今也没有临界点的精确解，利用蒙特卡洛模拟

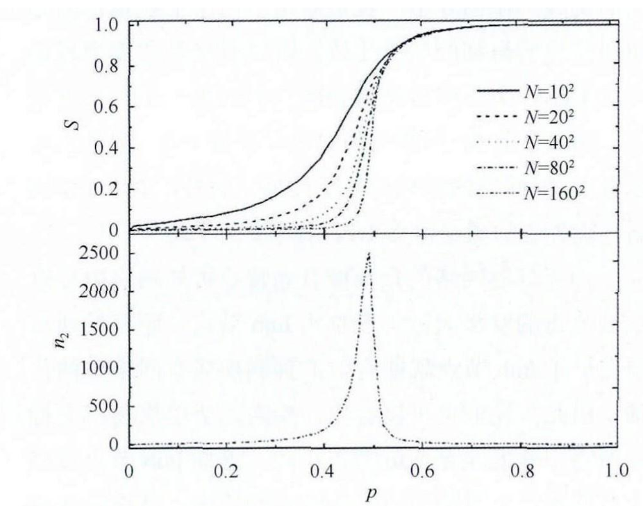

图 3　不同尺度下逾渗模型的模拟结果。其中，n_2 表示系统中第二大连通集团的节点数

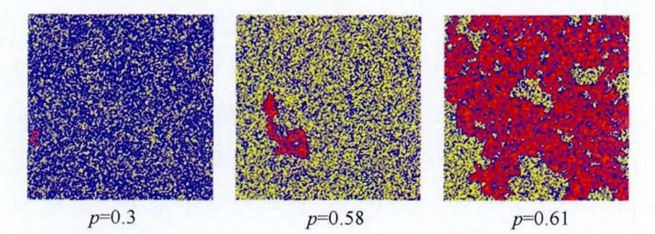

图 4　座逾渗示意图。黄色是占据的节点，蓝色是未占据的节点，红色标出最大连通集团。图中所用格子大小为 150×150

可求得较为精确的模拟值，约为 p_c=0.592746，图 4 也大致符合这一结果。

以上即是逾渗模型的基本概念与结论。逾渗作为一个经典的相变模型，关于临界现象、标度率的讨论也是统计物理研究中的重要内容，这里就不再多做讨论。该模型规则虽然简单，但是可以反映出很多物理问题的基本特性，例如，由超新星爆炸形成恒星的传播过程、核子中夸克的禁闭、聚合物凝胶化等。这些讨论中，逾渗模型的节点可以是尺度在 10^{20}m 量级的星系，也可以是尺度在 10^{-15}m 量级的原子核，连边可以是星系间的引力作用，也可以是大分子或夸克的分子或核子的作用。从宏观到微观，系统尺度跨度大，相互作用类型也多种多样，但是都通过逾渗模型得到了很好地抽象与探究。此外，逾渗模型反映出的分形现象，使得其也常常作为重整化群方法的应用实例出现。计算物理方法的探讨中也常常以逾渗模型作为应用例子。这些理论与应用都使得逾渗模型在物理学研究中占有重要的地位。

二、复杂网络中的应用

近年来，复杂网络研究的兴起使得逾渗模型得到了新的应用。一方面，网络的连接结构可以用逾渗模型进行探究；另一方面，对于一个确定的网络，节点状态的传播（信息、疾病、意见等）也可以用逾渗模型研究。下面我们就介绍复杂网络研究中逾渗模型的几个经典应用。

1. 经典逾渗

不规则网络的最简单模型即是 Erdős-Rényi（ER）随机网络模型。在该模型中，任意两个节点都有概率 p（0<p<1）相连。这显然是一个键逾渗问题，只是一个节点可以连接的节点不再限于它的四个邻居，而是整个网络中的节点。在这样一个网络中，总边数显然

为 pN（N-1）/2，即节点的平均连边数为 p（N-1）。复杂网络中，将节点的连边数称为节点的度，对于较大的 N，网络的平均度为 pN。研究发现，当平均度 pN>1 时，系统中出现巨分量，即 ER 网络的逾渗相变临界点为 p_c=1/N。这说明，真实网络中每个个体至少需要连一条边，才能构成一个连通的网络。ER 网络的逾渗模型分析发现，在临界点以下，系统中连通集团大小处于 ln$N$ 量级；在临界点附近，系统中连通集团大小处于 $N^{2/3}$ 量级；高于临界点时，系统中连通集团大小处于 N 量级。

进一步的研究还发现，当 p 较小时，在 N^{-1} 量级（稀疏网络），网络呈现出树形结构（见图 5）。在这样一个树形网络中，相邻两层节点数比为定值 pN。研究者还发现，在这样的树形网络中，节点的平均距离 $l \sim \ln N$。所谓节点距离就是网络中两节点间最短路径的长度（边数）。这就是真实网络的小世界特性，即在很大的网络中，节点间还可以保持较小的平均距离。

除了分析随机网络的结构，键逾渗模型还可以分析网络上的传播过程，例如，经典的流行病传播模型。该模型的基本思想是在一个人群中，染病者以一定概率将疾病传播给其他人，最终考察总的染病人数。但是，经典微分方程讨论的基本假设是个体完全混合，即每个染病者都有相同的概率将疾病传给其他所有人。这显然是不实际的，疾病应该只能通过人际接触传播，而人际接触是有限且有规律的，呈网络的形式。

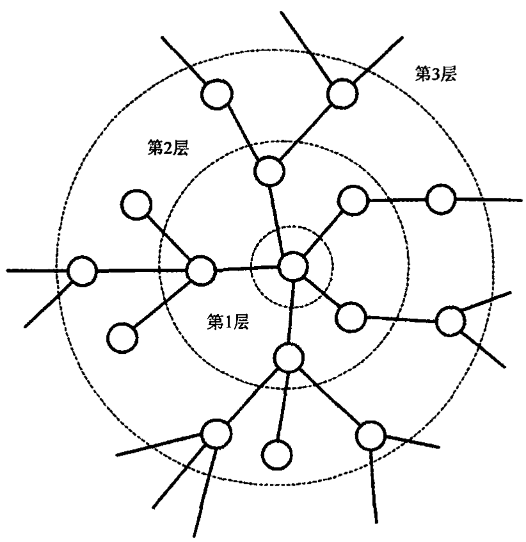

图 5　ER 随机网络层次结构示意图

当我们考虑这个网络时，就可以用键逾渗模型来讨论这类传播问题，只是这时方格子由一个不规则的人际接触网络取代。

在一个给定的网络中，占据边表示疾病可以在所连接的两个节点间传播，未占据的边表示疾病不可以传播。这样，键逾渗的边占据概率就成为疾病传播模型中的疾病传播概率。当网络中有巨分量时，巨分量中只要有一个节点是初始染病的，巨分量中所有节点都会染病，即系统中大规模暴发流行病。当网络中没有巨分量时，疾病显然不可能在系统中大面积暴发。当然，疾病的暴发也与初始染病节点数有关。如果初始传染源较少，巨分量中没有传染源，疾病也不会大面积暴发。对于一个无限大的系统，有限个初始传染源将不会影响最终结果。

研究发现，人际接触网络的结构对疾病传播有很大的影响。复杂网络中一般用度分布简单衡量一个网络的结构。所谓度分布，即是整个网络中节点度的分布。实证研究发现真实网络的度分布一般满足 $p_k \sim k^{-\gamma}$，其中 k 为节点度，γ 为常数，一般有 $2<\gamma<3$。这种网络一般称为无标度网络（SF）。在这种结构的网络上，可以用生成函数或平均场等方法求出系统的逾渗相变临界点，$p_c \to 0$。也就是说一个很小的传染概率（疾病的传染性很弱）就可能引起系统中疾病的大规模暴发。由于无标度是真实网络的度分布特性，这一结果也给实际中流行病的防治提出了巨大的挑战。在图 6 中，我们给出了网络上疾病传播与逾渗模型所得到的结果比较，可以看出逾渗模型理论可以给出一个与模拟结果相吻合的结果。由于尺度效应，图 6 中的 SF 网络的临界点并不等于 0，但是也可以看出 SF 网络的结构更易于传播。另外，对于 ER 网络，临界点的理论值为 1/z，其中 z 为平均度。

由无标度网络的指数度分布特点可知网络中会有个别节点的度极大，一般称为 hub 节点。研究发现只要保护了 hub 节点就能有效的抑制疾病在网络中的传播。由此，我们也可以看出，疾病之所以极易在无标度网络中暴发也是 hub 节点所致。这些 hub 节点度极大，连接了大量的节点，一旦它们染病，就会迅速将疾病传给整个网络。另外，需要指出的是，逾渗模型

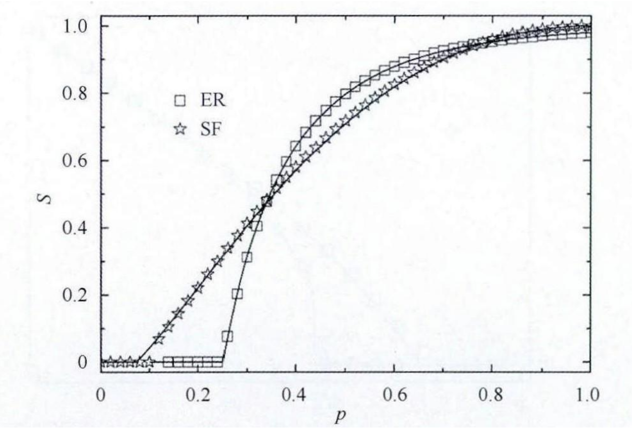

图 6　网络上疾病传播模型。实线为逾渗模型理论值，散点为传播模型模拟值。两个网络平均度都为 4

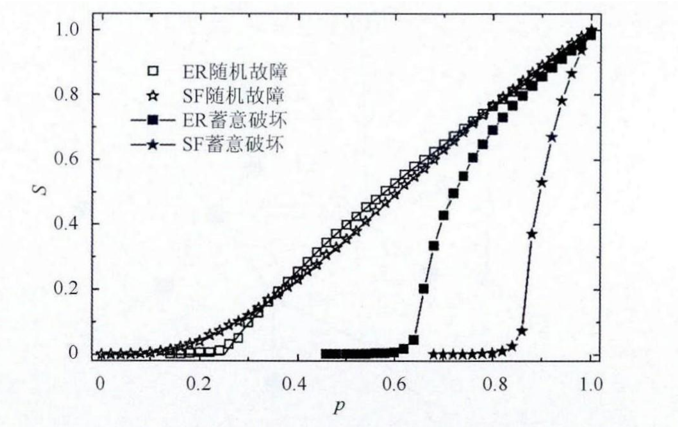

图 7　网络的鲁棒性。随机故障即逾渗模型中随机设置占据的节点，实线为理论结果，散点为模拟结果。蓄意攻击即选择大度节点为初始未占据节点，图中所给为模拟结果

无法考察疾病在网络上的传播过程，即无法知晓初始传染源怎么样通过节点一个一个的将疾病传播到整个网络。这也是该模型的弊端，其考虑的只是整个传播过程的最终稳定态。

其他网络传播问题，如计算机病毒传播、信息传播、意见传播等，都可以类似的建立逾渗模型讨论。然而，这些讨论都是利用键逾渗模型，下面我们将注意力转向利用另一类逾渗模型——座逾渗，介绍复杂网络中座逾渗模型的应用。

如果我们将座逾渗模型中未被占据的节点（比例 1-p）理解为一个系统中受到外部破坏或内部故障而损毁的节点，该模型就可以用来讨论电力、通信等网络系统的故障承受能力，即系统的鲁棒性。鲁棒性即是系统在某种扰动下，保持其自身性能的性质。系统的鲁棒性越强，其性质越不容易受到扰动的影响。这里的扰动即是节点的破坏，系统性质即是网络的连通性。类似于键逾渗，网络结构对座逾渗也有巨大影响。对于无标度网络，座逾渗的临界点也同样趋近于零（图 7）。这说明无标度网络的鲁棒性很强，即使大部分节点故障，网络仍能保证连通性。无标度网络的这种强鲁棒性也是由 hub 节点决定的。hub 节点度极大，且数量很少，模型中随机选取故障节点时，它们几乎不可能被选中。所以，无标度网络的鲁棒性很强。换个角度，如果模型中的节点占据不是随机的，即有选择的将 hub 节点作为故障节点，网络将极容易被破坏（见图 7）。

2. 改进的逾渗模型

以上讨论的都是经典逾渗模型在复杂网络上的应用，而实际网络相关的问题都会很复杂，经典的逾渗模型并不能准确的反映出实际问题的特点。所以，在复杂网络问题的研究中，常常会根据实际需要对逾渗模型进一步改进。一般的处理是对模型中节点或边的占据添加一些特殊条件，称为依赖逾渗（dependent percolation）。下面，我们就来介绍几个具体的例子。

如图 8 所示，改进的网络座逾渗模型，不仅直接占据网络中部分节点（黑色），而且间接占据这些节点的邻居（灰色）。这一设置可以理解为，在网络中的部分节点（比例 p）上安装探测器（直接占据节点），并可以观测其邻居节点（间接占据节点）。那么，该模型就可以用来讨论探测器数量与观测到的网络大小的关系。在图 9 中，我们给出了该模型的理论（实线）与模拟（散点）结果，结果表明 ER 随机网络与 SF 无标度网络都只需要很少的观测点即可观测到网络的大部分节点。这是由于两种网络都具有小世界特性，较小的节点间距使得观测到的节点很容易相互连通。

考虑更为实际的网络鲁棒性问题——故障节点不仅会破坏网络的连通性，而且能引起其他节点的故障。为了反映这一特性，我们可以将座逾渗模型进一步拓展。假设一个正常节点有超过一定数量或比例的邻居故障时，也会故障。这样的设置就可呈现出故障在网络上的传播现象，即所谓的级联故障。在图 10 中，我们给出了一个常见的级联故障模型的结果。在该模

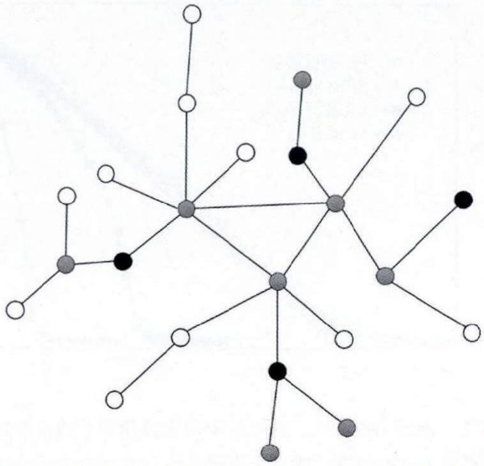

图 8　观测网络的逾渗模型示意图。黑色标出直接观测节点，即安放探测器的节点，灰色标出被间接观测到的节点

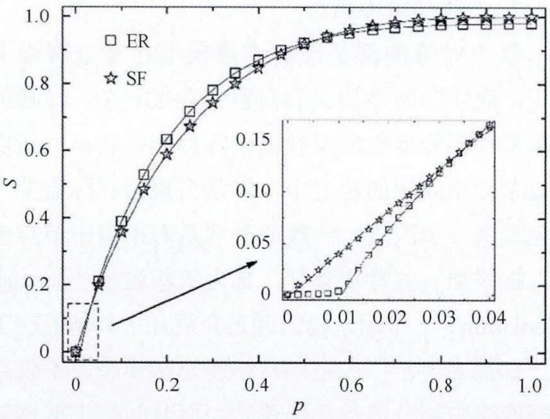

图 9　网络的观测。p 为直接占据节点比例，图中小图为 p 较小部分的放大。所用网络平均度均为 4

型中，节点必须拥有大于或等于其初始度比例 λ 以上的正常邻居才可以继续保持正常，否则节点也会发生故障。这样，在初始删除 $1-p$ 比例的节点后，网络中会有故障迭代产生，直到网络中没有节点再会发生故障。比例 λ 越大，节点越容易发生故障，系统的鲁棒性越差。由图 10 也可以看出，随着比例 λ 的增大，逾渗相变的临界点增大，即系统越脆弱。另外，从图 10 中，我们还可以发现对于较大的 λ 值，该逾渗模型还可以展现出不连续相变，即在临界点出现序参量的跃变。这更进一步说明了系统在较大的 λ 值下的脆弱性。相比于经典的鲁棒性模型，这时系统的崩溃是突然的。

以上讨论系统鲁棒性时，考虑了系统中节点功能的依赖性。在实际中，跨系统的节点功能依赖也是常见的，例如，通信系统与电力系统二者就存在着供能

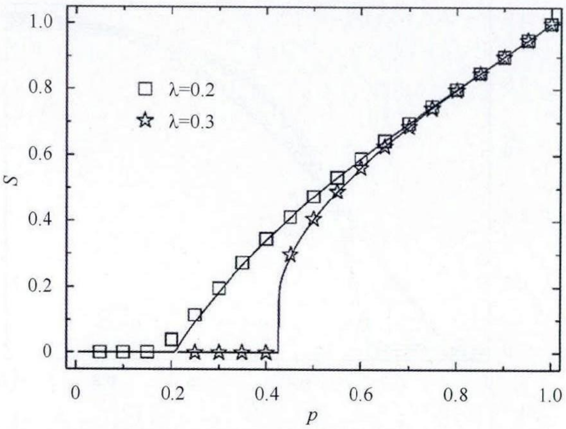

图 10　级联故障模型。实线为理论结果，散点为模拟结果。所用网络平均度为 8

与通信控制的依赖。近年来，为了讨论这种依赖系统的鲁棒性问题，相依网络的逾渗模型得到了研究人员的广泛关注，这种耦合网络系统也可以呈现出不连续的逾渗相变。

在图 11 中，我们给出了相依网络逾渗的一个经典模型示意图。在该模型，两个网络中的节点一一对应依赖。一个节点发生故障，不但会使自身所在网络连接断裂，某些节点脱离网络而发生故障，还会使另一个网络中的对应依赖节点发生故障。这种机制可以很好地反映出系统间的关联性，也同样能引起系统间迭代性的故障传播，即系统间的级联故障。以图 11 为例，图（a）～（f）展示了相依网络的级联故障过程。在每个图中，有左右两列用来表示 A、B 两个网络。实线表示各自网络的连边，虚线用来表示两个网络之间相应节点的依赖关系。这种依赖关系是相互的，即虚线连接的两个节点中任意一个故障，另一个也会故障。故障的节点用黑色表示。（a）初始的网络。（b）A 网络中初始一个节点故障，该故障节点失去其所有连边。(c)A 网络中，部分节点由于脱离网络而失效。(d) 与 A 网络中失效节点相依赖的 B 网络节点也会失效。（e）B 网络中部分节点也因脱离网络而失效。（f）B 网络中失效节点又使得 A 网络中对应节点失效。最终，两个网络中剩余节点的数量相同，它们是自身与所依赖节点都在各自网络的巨分量中的节点。需要指出的是，有些情况下，在反复的迭代删除后，网络中将不会有巨分量存在。

由图 12，我们可以看出这种系统的关联，使得两

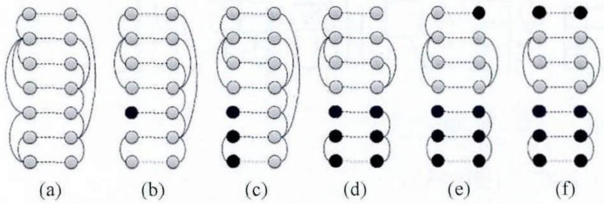

图 11　相依网络逾渗示意图。每个图中左右两列分别表示两个网络。网络间的虚线表示两个网络之间相应节点的依赖关系。黑色节点表示故障节点。初始随机选取部分故障节点，图由左至右展示了故障在网络间的传播过程

个网络都变得极脆弱，呈现出不连续相变。更有趣的是，无标度网络在该模型下变得极端脆弱，甚至比相同平均度的ER随机网络还要脆弱。这与经典逾渗模型的结论相反。这种现象也是由无标度网络中的hub节点造成的。在经典网络逾渗模型中，无标度网络中hub节点很少，所以随机选取初始故障节点很难将hub节点破坏，这使得无标度网络的鲁棒性很强。相依网络中，一个hub的节点很可能会依赖一个小度节点。而小度节点很容易在级联过程中因脱离网络而故障，所以这种依赖性大幅提高了hub节点故障的概率，使得无标度网络变得极度脆弱。反观ER随机网络，由于网络中节点的度差别不大，所以相依并不会引起过大的破坏。

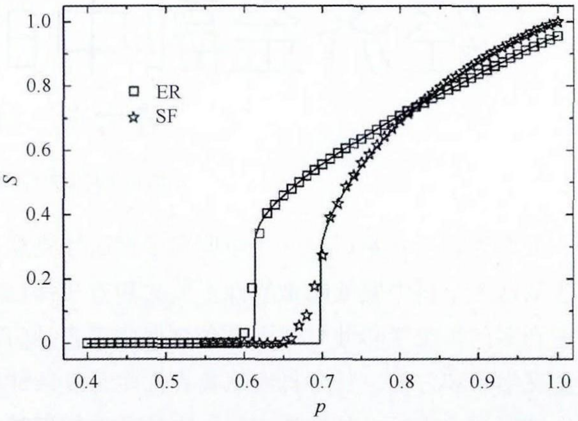

图 12　相依网络逾渗。实线为理论，散点为模拟结果

三、总结

本文简单介绍了逾渗模型的基本规则与现象，并以复杂网络问题为例，介绍了逾渗模型的具体应用。作为一个经典的相变模型，逾渗模型的规则简单，但却能反映分形、标度率等现象，也可以作为平均场、重整化群等方法的经典应用实例。所以，一直以来都受到物理学者的关注。近年来，复杂网络科学的兴起，又为逾渗模型找到了新的应用点，也必将为解决实际问题与推动物理学发展起到积极的作用。

DOI:10.13405/j.cnki.xdwz.2015.03.011

科苑快讯

地球陆地面积因生命活动而变大

似乎有些不可思议，但是地球生命活动的各种侵蚀却促进了陆地面积的增长。研究者在欧洲地球科学联合会（European Geosciences Union）年会上说，生命活动改变了陆地面积。根植于岩石的地球生命，将岩石侵蚀粉碎为沉积物。这些沉积物如同浸入牛奶的饼干，携带液态水进入洞穴，使更多的水回到地幔重新参与循环。100～200千米深的地幔如果没有足够的水保持物质流动，产生的陆地将少于现在。

论文作者建立的行星演化模型表明，在维持很大的陆地面积时，如果陆地风化和侵蚀率下降，这一过程会发生怎样的变化。随着时间的推移，如果地球没有生命演化，就没有足够的水以此方式进入地幔产生更多的地壳，陆地随后将缩小。而现在地球表面的40%是陆地，倘若没有生命，陆地面积将减小为30%。在极端情况下，如果生命从未出现过，陆地面积将只占地球表面的10%。在地球成为宜居星球时，生命对栖息地的建立起到了重要作用。

（高凌云编译自2015年4月16日www.sciencemag.org）