

长链自由下落问题

李东骏^{1,2} 刘文浩³ 刘全慧²

(1 长沙市雅礼中学国际部 410007; 2 湖南大学物理与微电子科学学院理论物理研究所 410082;

3 山东大学电气工程学院 250100)

当年伽利略在比萨斜塔自由下落两个铁球，一大一小，发现它们同时落地。如果一手抓一根自然下垂的长链（例如软绳、项链、铁链等）的上端，一手抓一个铁球，同时释放。问，链的上端和铁球，哪个先落地？

问题的答案彻底反直觉：长链下降得更快！

1. 问题缘起及其定性解释

关于变质量系统，有一道经典习题如下：一串项链由于重力作用自由下落掉到秤盘中，参考图 1。问下落过程中秤的指示如何？标准答案是：秤指示的重量是秤盘中项链重量的 3 倍。

解答如下：设项链为柔软且质量分布均匀，单位长度质量密度为 λ 。参看图 1 (b)，此时秤盘中的长度为 $x=gt^2/2=vt/2$ ，重力为 $mg=\lambda xg$ ，其中 $v=gt$ 为 t 时刻的速度。刚落入秤盘的一小部分 $v\Delta t$ 动量的改变率为 $\Delta p/\Delta t=(\lambda v\Delta t)v/\Delta t=\lambda v^2=\lambda(gt)^2=(\lambda gt^2)g=2\lambda xg=2mg$ 。故秤的指示的重力为 $mg+\Delta p/\Delta t=3mg$ ，也就是秤盘中项链重量的 3 倍的重力。

这里一个关键的假设是流体假设：刚落到秤盘的项链和其上面的一个项链似乎没有链接，近乎两个水珠，参考图 2。

这一假设被一位大学生所质疑。1984 年，康奈尔大学机械工程系的瑞纳 (Ruina) 教授正给二年级本科生讲解此题。一位学生提问说：分析即将要掉到盘中的珍珠时，需要把这颗珍珠从项链中隔离开来。而您教过我们如何处理这类问题，即在和环境相隔离时，应该在原来和环境相连的每个点上引入一个力。而在这里，您没有引入项链和上面链接的部分的力，为什么？换句话说，也就是要在图 2 中引入一个力 N_2 。

参看图 2，主要考察纵向运动，忽略横向部分。此时它受三个外力，一个是重力（没有画出来），方向向下；一个是这颗珍珠下面的珍珠或者秤盘对这颗珍珠的支撑力 N_1 ，方向向上；一个是它上面的珍

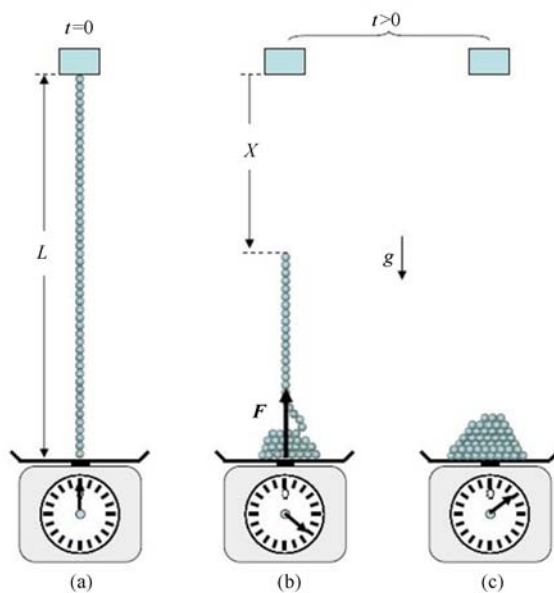


图 1 一串珍珠落秤盘全过程。初始 $t=0$ 时，项链轻触秤盘，秤指示受力为零；在下落过程中，理论计算为已落部分的 3 倍，但是实际测量结果要稍微大些，所以下落加速度比重力加速度要大。珠对它的拉力 N_2 ，方向依然向上。这三个力平衡： $mg=N_1+N_2$ 。

而引入了这个力 N_2 之后，综观这颗珍珠上面（正在下落中）的珍珠链部分。就不仅仅受到重力，而且还受向下的力，大小为 N_2 。正是这个向下的拉力导致了项链顶端下落的加速度比重力加速度大！

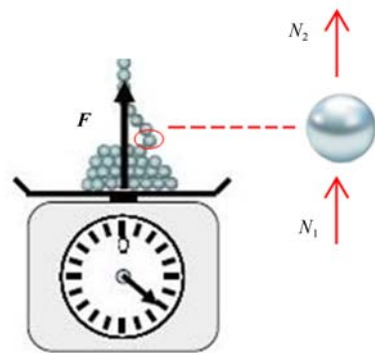


图 2 用等效力对即将落入秤盘中的一颗珍珠进行受力分析。它受到三个力：重力（向下），下面静止珍珠的托举（向上），上面的珍珠的牵连（向上）

2. 两个直接实验

第一个直接的实验结果发表于 2010 年，为智利

教学参考

圣地亚哥大学的哈姆 (Hamm) 和里昂高师的杰米纳德 (Géminard) 合作完成。参考图 3, 将一个小金属球和一串项链的顶端同等高度 ($L=1.898\text{ m}$), 然后同时下降。结果发现, 项链下降得更快!

康奈尔大学的瑞纳教授关注这个问题接近 30 年, 在他看来, 图 3 的实验不太可信。在这一实验中, 如何保证链子的空气阻力和铁球的空气阻力一样呢? 有见如此, 瑞纳设计了专门的实验, 用的是两根一模一样的链子, 实际上是两付同样的软绳梯, 参看图 4。开始时, 一副绳梯的底部轻触桌面, 一副离开桌子边沿自由悬空。同时释放, 然后用高速摄像机拍摄。结果清楚地显示, 掉在桌面上的绳梯下降得更快。

长链下降更快的关键因素在于和桌子碰撞的链节不是流体, 而是刚体。瑞纳意识到这一点, 为了说明转动的影响, 他还特地将梯子横档设计成为斜向。参看图 5, 局部的转动导致了对上一节链节的明显下拉力, 正是这个拉力使得掉在桌面上的链条下降更快。

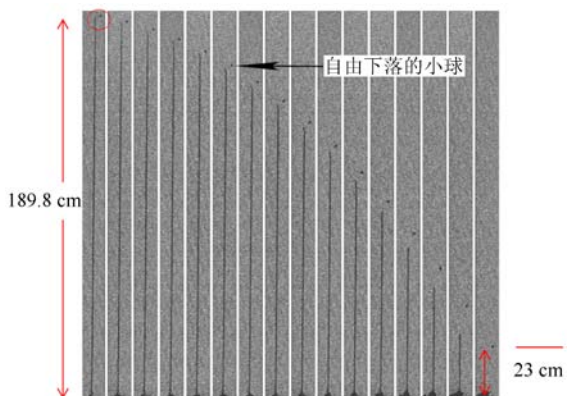


图 3 在接近 2 m 高的距离上, 出现了 23 cm 的落差

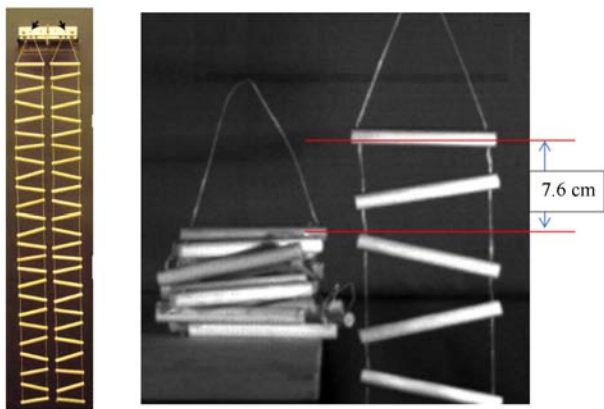


图 4 链长 125.1 cm, 桌上的链子尘埃落定, 自由下落的链子还有 7.6 cm

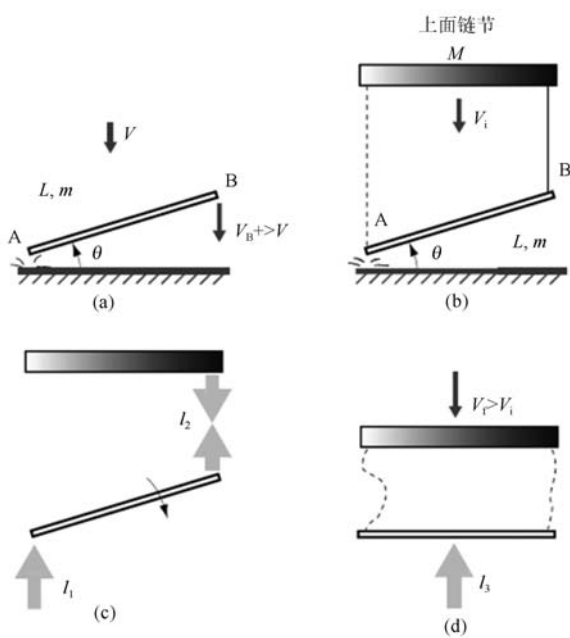


图 5 (a)斜向的横档一端 A 敲击桌面, 另一端 B 加速向下转动。这个转动导致横档 B 端向下的速度分量比自由下落的速度大; (b)、(c) 向下转动导致了上面的链节受到向下的拉力; (d) 这个拉力导致了上面的链节下降速度增加

两个小组建立了不同的模型, 但是计算结果是一致的: 向下拉力中超过重力的部分和速度的平方成正比。

3. 探索尚未有穷期

把图 5 中的次序反过来, 下落变为上升, 会发生什么? 原来斜向的横档 B 端被提起来。由于转动, A 端将下压。这个下压具有重要意义, 会导致另外一些更加违反直觉的结果, 例如最近网络上广泛流传的“反重力”(anti-gravity 或者 gravity-defying)链条喷泉(chain fountain)实验。

一个演示实验如下: 把链条放在一个杯子里, 让一端自由下落, 会发现链条“喷泉”现象, 参见图 6。如果沿杯子缘口慢慢往下拉链条, 链条会沿杯子缘口“流出”。如果链条越流越快, 杯中的链节获得的速度就会很大以至于飞向空中, 然后下落。形成所谓“喷泉”现象。这个视频的原创者是英国 BBC 的电视记者牟尔德 (Mould)。拍摄于 2013 年, 然后全世界流传。国内外的其他电视记者、科学爱好者也开始变着花样进行类似的视频拍摄。不仅受到了数学、物理学界的关注, 还吸引了美国 *Science* 和英国 *Nature* 杂志的注意。2014 年一共有三篇理论研究论文, 分别发表于《英国皇家学会会刊》(*Proceedings of the Royal*



图6 链条“喷泉”现象。让杯子中的长链一端下落，另外一端会跳出杯子，形成一个弯弧

Society A, 470(2014)20130689), 美国的《物理评论》(*Physical Review E*, 89(2014)053201) 和《欧洲物理快报》(*Europhysics Letters*, 106 (2014) 44001)。这些刊物都是国际上公认的物理学权威刊物。

参见图7, 可以清楚看出原来静止在桌面的长链由于头部的飞出, 尾部会整体后退! 如果没有这个整体后退, 头部将飞得更高更远。换成图6中的“喷泉”实验, 托举杯子的手会有多余的沉重感。所谓“多余的沉重感”指的是超出杯中链条净重的部分。如果手的托举力刚刚够支持杯中链条净重的部分, 这份“多余的沉重感”就会使得托举高度持续下降。形象地说, 正是“多余的沉重感”的反作用力把链节“踢”到了半空中。也正是托举高度基本不变, 才使得链条“喷泉”最后基本稳定在一个高度上。

这个现象动力学解释需要一些高等的分析手段, 参见前面提到的三篇论文。但是其运动学解释却不难。我们很熟悉用长绳索甩响鞭的现象。当牵动绳索的一端高速往前拉的时候, 尾巴上会形成一个回弯, 这个回弯压缩空气后迅速释放, 会发出爆炸声。图6中的喷泉就是这个回弯, 图7中也是跑动的回弯持续推动了长链底部后退。如果速度恒定, 回弯半径就基本不变。

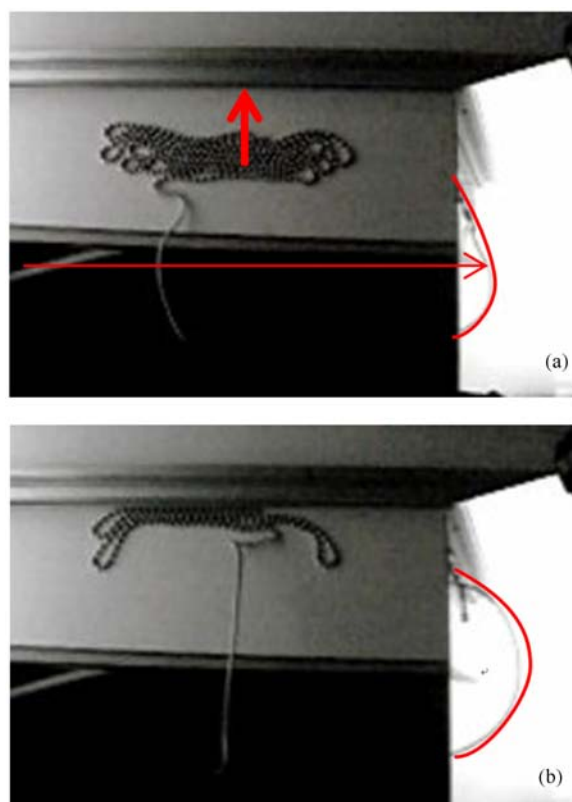


图7 长铁链从桌子下落(取自里昂高师 Gémard 小组制作的视频)。长链下落过程之前, 先飞向空中(参看(a)、(b)图中右边屏幕上的投影), 同时桌面上剩下的长链底部后退

4. 小结

(1) 自由下落的长链顶端的加速度比当地的重力加速度大。

(2) 如果长链放在杯子里, 一端下落, 会看到链先从杯子飞向空中, 然后下落, 形成所谓的“喷泉”现象。

(3) 如果长链摆在桌面上, 然后从桌面一条边下落, 长链会有两方面的飞起。一方面的飞起是离开桌面, 另外一方面的飞起是飞离长链堆放的方向。

现实世界中有很多违背直觉的现象, 如果坚持物理学的“从微观、从动力学、从原理”的这三把“解剖刀”进行分析, 基本上可以弄清楚这其中的物理原因。进一步, 物理学又可以预言一些违背直觉的新奇现象。对反直觉现象的研究正是物理学能激发人类好奇心的长久原因之一。

致谢: 感谢康奈尔大学 Ruina 教授、里昂高师 Gémard 教授慷慨允许使用他们文章网站中的图片。感谢国家自然科学基金项目(编号 11175063)、湖南大学教改基金资助。