

# 道可道，非常道——从准晶体到自我意识的硬难题

吴建永

两年前，当我听到2011年诺贝尔化学奖的消息，晚上浮想联翩，竟至失眠。脑子里涌现出一大串看似关联，又非关联的故事：准晶体、王浩瓷砖、彭罗斯地板、图灵机、哥德尔定理、意识的硬难题……次日是周五，教课开会虽然很累，但还是迫不及待地漏夜写出。今天翻出草稿，整理一下细细讲来与大家分享。

为什么一个准晶体问题能有那么多关联呢？因为科学像棵大树，上面枝繁叶茂，而下面的根基都是互相连结的。像准晶体这样的只有少数人懂的实际问题通过纯数学理论与其他科学相连，甚至走到了科学与哲学交界的边缘。作为科普文章，本文的目的只是把问题的脉络理清，让外行的人对这些枯燥的科学有个兴趣。

丹尼尔·舍特曼（Dan Shechtman）独得2011年诺贝尔化学奖的事让很多人奇怪。现代科学越来越依靠团队作战，一个人独领风骚的发现很少了。一般得诺奖的项目常常是几个大团队竞争，甚至同时在顶级杂志上发表。相比之下舍特曼是个单干户，他在电镜下发现准晶体的时候很多人不信，原始文章艰难奋斗了两年才得以发表。从这种情况看他独得诺奖不仅是完全应该的，而且也说明即使在今天的大科学环境下，天才的想法往往来自个人脑中的灵光一闪，跳出藩篱。财大气粗的团队作战虽然能提高产生天才想法的几率，但惨淡经营的小实验室也有千思一得的机会。

在讲准晶体前，咱们先讲一下晶体是什么。广义来讲，晶体就是空间中有周期重复的对称性排列。比如一块瓷砖铺的地板，当你定下一块瓷砖的位置，平移几寸就是另一块瓷砖的位置，再平移几寸还是一片瓷砖。同理上移或下移一个尺度也是一块瓷砖。这就是个广义的晶体，具有“周期重复的对称排列”的性质。周期重复的对称排列是个很强的限制，在二维空

间里，用一种瓷砖一共只有17种周期对称排列方式。这些方式也叫糊墙纸群（wall paper groups，图1）。

糊墙纸群原本是伊斯兰寺院里千百年来码瓷砖地板（马赛克）的实践中总结出来的，后来由数学家从理论上进行了总结。首先是沙俄时代的科学家叫伊果·菲得洛夫（Yevgraf Stepanovich Fyodorov），从数学上证明了在二维17种周期重复的对称排列，并在1879年推导到三维空间，证明点群的空间周期对称排列只有230种（菲得洛夫空间群）。可惜这个天才科学家在1919年苏联剿匪时期被饿死了（还有一说他死于肺炎）。

1924年，匈牙利数学家乔治·波利亚（George Pólya 1887～1985）在不知道菲得洛夫工作的情况下再次总结出这个规律。比起菲得洛夫，波利亚可幸运多了，也有名多了。他在瑞士躲过二战，战后移居美国，在斯坦福大学做终生教授。波利亚晚年最著名的工作当属“怎样求解一切问题”。他的著作《怎样求解》（*How to solve it*）至今仍是数学教学的经典。现今世界上有三个奖项以波利亚命名，奖励数学界最好的文章、最有意思的应用和最赋创造性的工作。

扯远了，再回来谈准晶体。自1912年晶体结构学建立以来，在对世间所有晶体的结构观察中，周期重复的对称排列规律的概念是根深蒂固的。因此，当舍特曼在电镜下观察到快速冷却后的铝锰合金表面那些整齐排列却无空间对称的结构时，连他自己也不相信，在纪录本边上连画几个问号。所谓准晶体，就是周期排列而没有空间重复对称的花样，图2比较了晶体和准晶体。

舍特曼发现的意义是，虽然晶体结构理论是牢不可破的，但该理论却没限制准晶体的存在，从此意义来讲准晶体的发现是一种典型的跳出藩篱式思维的

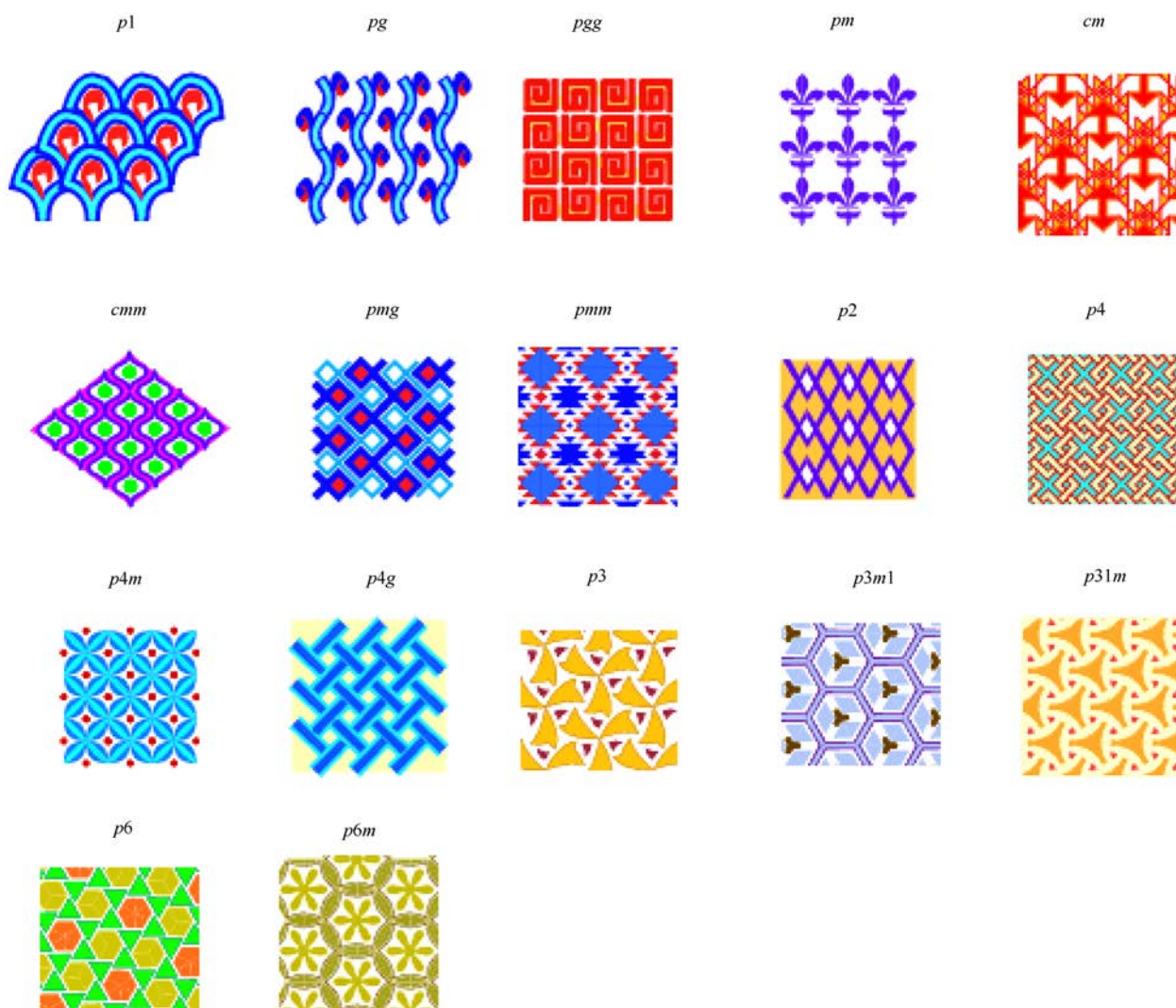


图 1 17 种糊墙纸群。都是周期排列而且在空间上平移或旋转对称（图片来源：<http://mathworld.wolfram.com/WallpaperGroups.html>）  
讲清这些群的定义比较繁琐，但很多教科书里都有，这里就不详细讲了

结果。

谈起准晶体的跳出藩篱，我还要提一下中国数学家王浩的工作。王浩（1921 ~ 1995）是山东人，他最出名的跳出藩篱的工作是 1959 年在牛津大学当讲师的时候写的一个计算机程序，只用 9 分钟的时间就证明了罗素和怀海德的经典教科书《数学原理》中罗列的几百个数理逻辑定理。

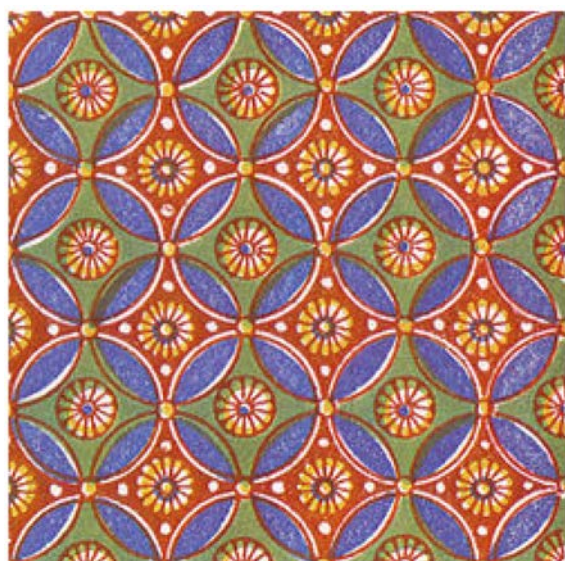
王浩的另一项工作是多米诺骨牌问题。在这项工作中他迷在圈中而他的学生却跳出藩篱，而由此引出了数学中的二维准晶体。这就是所谓“王浩瓷砖（Wang tiles）”。王浩瓷砖是正方形，同样大小，每边有颜色的砖。王浩瓷砖问题是说，如果用一套瓷砖，在相

邻的边颜色相同的情况下能否一块一块地排列在无限大的地板上，条件是瓷砖不许旋转或镜像。王浩在 1961 年提出一套证明，说只要瓷砖的种类有限，就一定可以无限至地周期地排列下去。注意，这里“周期排列”就是我们所说的广义晶体结构。

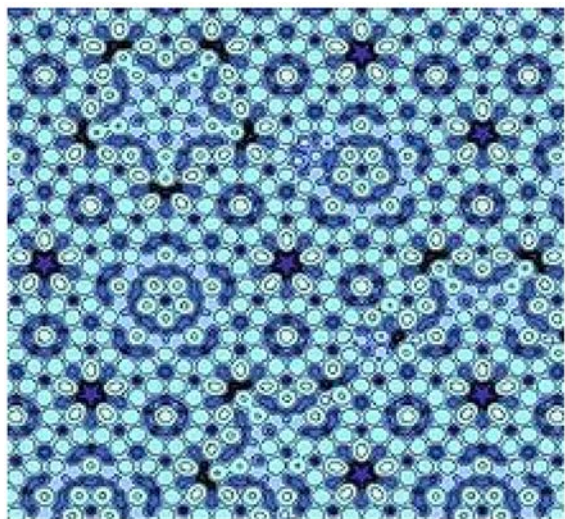
可是几年后王浩的一个学生罗伯特·伯格（Robert Berger）却证明王浩的证明错了。伯格在 1966 年的工作证明用一套有限种的王浩瓷砖可以排列成非周期重复的地板，这种非周期重复的花色就像准晶体一样。

提到非周期重复的准晶体地板，另一个著名的例子是罗杰·彭罗斯（Sr. Roger Penrose）的工作。彭罗斯爵士是英国物理学家，由于对宇宙学的贡献被英国





(a)



(b)

图2 (a) 一种属于糊墙纸  $p4m$  的二维“晶体”，具有周期重复的对称排列性质；(b) 一种二维准晶体，周期排列却没有空间对称

皇家学会封为爵士。1988年他和霍金因为对宇宙学的贡献而分享当年的沃尔夫奖（是世界上公认的终生成就奖之一）。彭罗斯虽然主要成就是研究黑洞，但也爱研究“趣味数学”。1971年他发现了所谓彭罗斯瓷砖，也是有非周期重复花样的准晶体。彭罗斯地板有几个有趣的特性，比如可以越排越大，即同样的花样在不同的空间尺度下重复。还可以同时出现镜像对称和旋转对称等。

说了王浩、伯格和彭罗斯，咱们再来捋一捋这个问题的理论发展过程。数学科普要言必称希尔伯特难题，咱也不能免俗。20世纪初希尔伯特（David

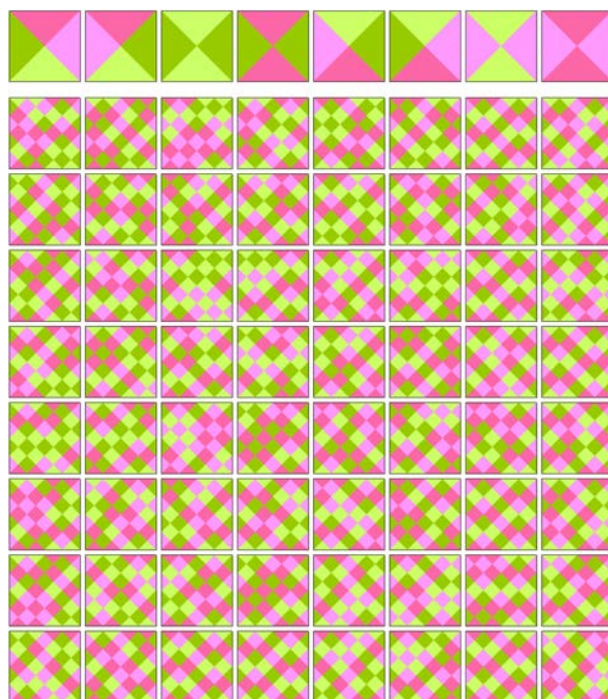


图3 用8种王浩瓷砖（上）拼成的非周期地板花样  
（图片来源 [http://research.microsoft.com/en-us/um/people/kopf/blue\\_noise/tilesets\\_01/](http://research.microsoft.com/en-us/um/people/kopf/blue_noise/tilesets_01/)）



图4 彭罗斯站在美国德克萨斯 A&M 大学内的一块彭罗斯地板上

Hilbert) 总结了挑战人类智慧的23个著名的数学问题。其中第18题的第2部分，就是瓷砖排地板问题。按理讲他的原问题已经被德国数学家卡尔雷哈德(Karl August Reinhardt)在1928年解决了，到了1961年，

王浩提出了一套算法，证明只要是有限种瓷砖，就可以用计算机自动排布。可是王浩的学生伯格来了个节外生枝，证明瓷砖问题是不可自动解决的。这是因为存在着非周期性排布（即准晶体）。这就把这个领域引申到非周期性排列。伯格的第一个证明用了 20426 种不同的王浩瓷砖。不久他把瓷砖的种类降低到 104 种。后来这个数目越来越低，到了 1971 年降低到 6 种。彭罗斯在 1973 ~ 1974 年把这个问题发展出一个新的分枝，只用两种瓷砖就可以摆出具有新空间排布规律的彭罗斯地板。

这么说起来，好像又掉进了数学科普的老套路：从希尔伯特难题开始，然后是  $n+1$ 、 $3+1$ ，最后是  $1+1$ 。这些纯数学的证明和我们日常的科学有啥关系呢？我虽然觉得联系是非常广泛的，但按照我所受教育的局限，我只能举一个例子，就是关于计算机的智慧能不能超过人的问题。把这个问题再向前引申一点，就脱离了科学而进入哲学的范畴，就是问人造的机器是否能有意志。准晶体和人工智能在数学中的联系在哪里呢？还且听我慢慢道来。

世间的所有逻辑运算，包括加减乘除，推理论断等都可以拆解成一步一步的简单逻辑过程，而可以进行这些逻辑操作的最简单的机器又称作“图灵机”。图灵机是个虚拟的机器，由阿兰·图灵（Alan Mathison Turing）于 1936 年首先提出。这图灵绝对是个天才，一个人开创了今天几门科学的先河。你今天用的 iPhone、iPad 等苹果产品的商标是个咬了一口的苹果，就是为了纪念图灵，他为了抗议社会对他性取向的歧视和虐待，于 42 岁时（1954 年）咬了一口沾有氰化物的苹果自杀了。

在 1936 年还没有电子计算机，但图灵已经证明了今天一切数字计算机的逻辑能力都可以拆解成为一个一个图灵机可以完成的任务。换句话说，就是图灵机与一切逻辑计算机完全等价。一切计算机能干的事图灵机都能干，一切图灵机不能干的计算机也不能干。再推广一点，人类进行的一切逻辑推理也可以拆解成图灵机的运算过程，即人类的推理能力和图灵机的能力等价。这么说，图灵机不是和人的智力水平一样了吗？

当然不是的。逻辑水平并不是全部智力。像王浩瓷砖、彭罗斯地板这样的准晶体就是人能创造出来而图灵机不能创造的，跳出藩篱的东西。还记得刚才讲的王浩在他瓷砖问题上的错误吗？王浩证明了他的瓷砖排列过程是和图灵机完全等价的逻辑过程，因此得出了“只要瓷砖的种类有限，就一定可以无限至地周期地排列下去”这个结论。可是他的学生伯格偏偏要跳出藩篱，找出一个特例推翻了他的证明，就是那个数学上的准晶体。伯格把排列准晶体地板与图灵机的逻辑推理互相等价，证明只有在图灵机永远不停的时候才可能在无限大的地板上排列非周期性结构。换句话说，准晶体的排布可以复杂到让图灵机在有限的时间内不能解的程度。

人能比计算机更聪明，这在数学上能否有严格的证明呢？1930 年，年仅 24 岁的奥地利博士生库尔特·哥德尔（Kurt Gödel, 1906 ~ 1978）在完成博士论文的时候提出了歌德尔“不完备定理”。不完备定理通俗地说就是一切逻辑系统皆有漏洞，有其显而易见却不能在该逻辑系统中利用逻辑推理解决的问题。歌德尔给出简单的例子，说明在一个用公理严格规定好的逻辑系统中，存在有逻辑推理不能得到，却可以被一眼看出的解。联系到图灵机和人类，就是说图灵机虽然可以和人类在解决逻辑问题上水平相当，却存在有无数个图灵机完全不能解决而又可以被一眼看出答案的问题。有其显而易见却不能在该逻辑系统中解决的问题。这漏洞就是有关系统本身的问题，因为本身（“我”）的存在而不能自圆其说。就是说，人的思想可以跳出逻辑系统之藩篱而计算机却不行。在本文中从晶体到准晶体，从糊墙纸群到王浩瓷砖和彭罗斯地板，都是人类灵机一动跳出藩篱的生动例子。那么人比计算机聪明，是否是因为有了“我”这个概念呢？

人和计算机智能最主要区别当然是人脑是有自我意识的，而计算机只是逻辑推理能力，没有自我意识。1989 年彭罗斯写了一本书，叫《皇帝的新脑》（*emperor's new mind*）。在书中他说我们迄今所有的一切科学理论，都不能解释人类的自我意识是怎么回事。这本书被译成中文，并在中国大大出名，我回国的时候竟看到有



盗版出售。几年前彭罗斯来我们学校作报告，我专门拿一本中文盗版的书找他签字留念。他很高兴地听到他的书竟能火到值得盗版的程度。

彭罗斯认为解释自我意识需要靠“量子纠缠”(quantum entanglement)这种常人难懂的概念。这量子纠缠虽然是个物理现象，却必须要依靠观察者主观的“我”才能看到。量子纠缠有个通俗解释，即所谓“薛定格猫问题”。说在量子纠缠状态下一个猫可以同时既死又活，只有在观察者出现的时候量子纠缠才会坍塌，出现死或活二者之一的现象。这个问题把唯物的物理科学引进唯心的世界，用观察者“我”来解释一个物理现象。

作为一个神经科学家，我觉得意识的产生并不需要量子纠缠这个假设。而可以用“由量变到质变”的过程来解释。这个由量变到质变的过程英文里有个词叫“emergence”，中文的译法为“涌现”、“突现”、“层展”(冯端先生)或“层展涌现”(赵凯华先生)等。日文译法为“创发”。我觉得中译法不够玄，而日文译法的“创”又有主观的意思。我觉得 emergence 应该译成“玄出”。

玄出是以简单和重复制造复杂事物的过程，以图5白蚁造窝为例，每只白蚁只懂得做非常简单的工作，比如，“衔起一粒土，走回窝”和“把土粒用唾液粘在比前一个白蚁放的土粒更高的位置”等。而当数以万计的白蚁日复一日地重复同样的工作时，一个高大宏伟的白蚁堡垒就建成了，建造这个堡垒对保护白蚁种群有极为明确的宏观意义，但没有一个白蚁的个体知道这个宏观意义。从此意义上看，保护白蚁种群这个宏观意义是从简单重复的劳动中“玄出”的。同样，人的大脑中没有一个神经细胞知道人在想什么。我们现在已经知道人脑中神经细胞也只会做几种简单且定义明确的工作，比如加和积分，振荡等。可是数以亿计的神经细胞的活动却可以玄出像梵高的画，莫扎特的音乐等不能被图灵机定义的事物，甚至像自我意识那样极为复杂，不能被科学定义的概念。王浩瓷砖和彭罗斯地板排列出的准晶体图案都可以看成玄出的一些简单的例子。

今天的神经科学家在遇到人类自我意识怎样产生



图5 白蚁在沙漠里搭的巢。沙漠里的树在几百万年来逐渐死光了，只能住在树干里的白蚁怎样适应？如果让人类工程师来帮助白蚁，他一定会设计出这种由土堆成的，树干形的堡垒。但人类工程师的设计需要人类的智能。而白蚁们虽然也能建造这个宏伟结构，但并没有一个个体是这个结构的设计师，也没有一个白蚁懂得它对种群保护的意义

这样的问题时，一般是绕着走。有的说意识不过是个幻觉。还有人相信二元论，也就是把大脑和意识分开，说自我意识不过是住在神经机器里的鬼魂。还有极少数比较自信的科学家试图把他的工作硬扯到能解释自我意识的高度。但是现代哲学告诉我们，如果你想解释“我”的存在，就一定会碰到所谓“意识的硬难题”。意识的硬难题在历史上从古希腊到现代哲学家，包括彭罗斯都有论断。近年来绝顶聪明的哲学家戴维·乔莫斯(David John Chalmers)表述了意识的“硬难题”。意识硬难题有很多种表述方法，比如从哥德尔的工作引出的“你知道它是存在的但却永远无法证明它是存在的”。有一种我比较欣赏的说法是，“如果你能说清自我意识是什么，那你所说的那东西就不是自我意识”。这也就是老子说过的，道可道，非常道。“可道”是个可用逻辑过程(人类语言)模拟的过程，而“常道”(自我意识)则是不可用图灵机逻辑过程模拟的事物。

(美国乔治城大学医学院神经科学系 哥伦比亚特区 20007)