

水中之月与天上的月亮等大吗？

——凸面镜成像漫谈

王伟民

农历每月的十二、十三前后，若是晴天，在太阳还未落山之前，一轮明月便挂在东方蔚蓝色的天幕上。此时，于风平浪静的海面，人们可以欣赏到水天一色，天上明月与水中月亮交相辉映的美景。

我们不禁要问，水中之月与天上的月亮等大吗？

该问题的答案似乎已无悬念——教科书及其相关的教辅资料均将平静的水面视为平面镜，由平面镜成像特点“像与物大小相等、像与物到镜面的距离相等”可知，水中之月与天上的月亮不但大小一样，而且它们到水面的距离也相等。

然而，深究起来问题并不这么简单。乘坐宇宙飞船的宇航员在太空中回望地球时曾经说过，我们给地球的名字起错了，应该叫水球才对。的确，地球的大部分表面被水所覆盖，若不是因为地球的自转，月球的引力以及大气的运动等外界因素的影响，覆盖地球的水面应该是一个标准的球面。这样看来，把平静的水面看作球面镜中的凸面镜，应该比将其视为平面镜更为合适。

生活经验告诉我们，物体在凸面镜中所成的是一个缩小的虚像，比如，我们通过汽车的观后镜，抛光的金属球等凸面镜所看到的物体的像，就是一个比实物小，有的甚至小很多的虚像。那么，人们通过平静的水面这个大“凸面镜”看物体的像时，为什么只有平面镜成像“等大”的感觉，却没有凸面镜成缩小虚像的感受呢？

从几何光学的角度来说，光学元件之所以可以成像，是因为光学元件（包括透镜及面镜）具有这样的性质——从同一点发出的射向光学元件的光线，经其反射或折射后，能够汇聚于一点（成实像）或变得发散，发散光线的反向延长线交于一点（成虚像）。

为探究凸面成像的特点，我们有必要先分析一下平面镜成等大虚像的原因。

如图 1，平面镜 EF 前有一点光源 S ，利用光的反射定律我们容易证明，由 S 点发出的射向镜面 EF 的所有光线，经镜面反射后，发射光线的反向延长线均过 S 关于镜面 EF 的对称点 S' 。若人在镜面的前面（图 1 中 EF 右侧）面向镜面，会感到这些发散的反射光线好像是从镜后的同一点—— S' 点发出的，就会觉得此处有一亮点，这便是点 S 在平面镜中所成的像。由于该像不是由实际光线汇聚而成，而是所有反射光线反向延长线的交点，这样的像虽说人可以看到，却不能在光屏上呈现，所以称之为虚像。对平面镜而言，由于像点与物点关于镜面对称，所以，占有一定空间的物体在平面镜中所成的像，也将与物体关于镜面对称。故像与物大小相等，像与物到镜面的距离相等。

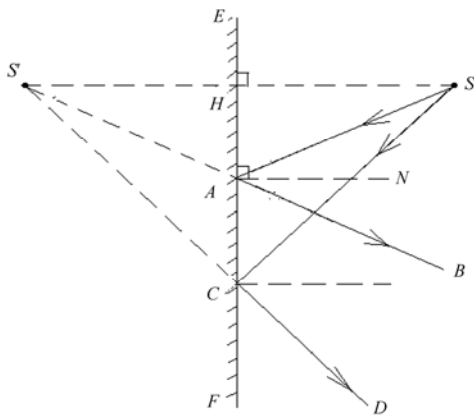


图 1

再探讨凸面镜的成像情况。如图 2，为便于分析，我们将半径为 R 的凸面镜与一个“透明”平面镜 MN 放在同一坐标内进行研究。

图 2 中，假设平面镜 MN 是一个不计厚度的玻璃板，将玻璃板与凸面镜相切放置，以切点 A 为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系。 S 为点光源， S' 是点光源在平面镜中的虚像，则 S 与 S' 关于平面镜 MN 对称。

由 S 发出的射向坐标原点 A 的光线经平面镜及凸面镜反射后, 均沿同一方向射出 (即图 2 中的 AB 方向——因为两光学元件在该点的法线相互重合), 设这条反射光线的反射角为 θ , 则 AB 的反向延长线过点光源 S 在玻璃板 MN 中的虚像 S' 。 SC 是由 S 发出的射向凸面镜的另一条任意光线, 交平面镜 MN 于 P , PQ 、 CF 分别是这条光线在平面镜和凸面镜上对应的两条法线, PE 和 CD 则是对应的两条反射光线, 设凸面镜上的反射光线 CD 的反向延长线交 AB 的反向延长线于 S'' 。

对凸面镜而言, 人在图 2 中的锥角 $\angle BS''D$ 范围内面向凸面镜观看时, 便会感觉到光线 AB 和 CD 是从凸面镜后的 S'' 点发出的, 就会感觉到该处有一亮点, 这便是点光源 S 在凸面镜中所成的虚像。

由图 2 可以看出, 人在凸面镜中看到的虚像点 S'' 较平面镜中的虚像点 S' 向镜面移动了一段距离, 换句话说, 点光源在凸面镜中的虚像, 像距小于物距。因此, 占有一定空间的发光体在凸面镜中所成的像, 将是一个缩小的虚像。

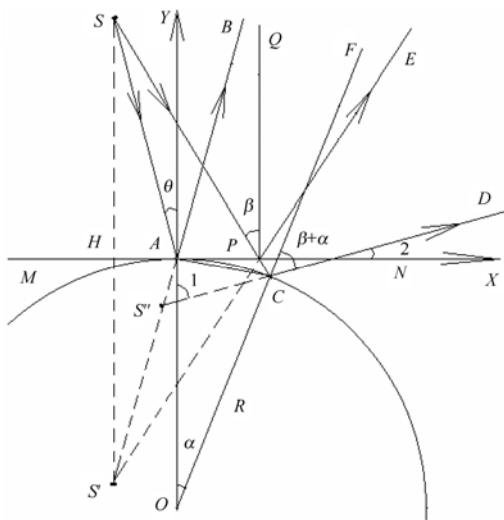


图 2

由图 2 还可以看出, 当光线 SA 的入射角 θ 一定时, S'' 在 $S'A$ 上的位置是由反射光线 CD 的方向来确定。设光线 SC 对于平面镜 MN 的入射角为 β , 圆弧 AC 所对的凸面镜的圆心角是 α , 易知, 光线 SC 对于凸面镜的入射角 $\angle SCF = \beta + \alpha$ (过 C 作 PQ 的平行线即可看得出来), 由图 2 可以发现, 圆弧 AC 所对的圆心角 α 越大, S'' 偏离 S' 的距离也越大。这就是说, 由点光源发出的射向凸面镜的所有光线, 经凸面镜反射后, 反射光线的反向延长线并不交于一

点。因此, 严格讲来, 凸面镜并不能成像, 只不过由于人的眼球不大 (人张开眼睛时, 可接受光线的眼球上下约 1cm 宽), 所以, 经凸面镜反射后射向人眼球的光线, 角度的变化不大, 这些反射光线的反向延长线虽不严格交于一点, 但交点范围比较集中, 可近似认为交于一点, 因此, 人面向凸面镜, 可以“看”到点光源在凸面镜中的虚像——亮点——实际上, 应该说是一个亮斑, 只不过是一个非常小并且到镜面距离小于物距的亮斑。因此, 占有一定空间的物体置于凸面镜前时, 人在镜中看到的是该物体缩小的虚像。

需要说明的是, 若凸面镜半径较小, 人眼离镜面较近时, 射入眼球的光线角度变化较大, 由点光源发出的, 经凸面镜反射后再进入眼睛的光线, 其反向延长线的交点范围不再集中, 而是分布在一个大的区域内, 点光源在镜中的虚像, 将变成一个模糊的光斑。相应地, 人“看”物体在凸面镜中的虚像时, 也将变得模糊不清了。同时, 人的面部离半径较小的凸面镜距离过小时, 进入人两只眼睛的反射光线方向差别过大, 两只眼睛所“看到”的像, 不但位置不同, 到两只眼睛的距离也不同, 即便是清晰的, 人感觉到物体的像也是模糊的 (人对自己两只眼睛的调节总是“同步”的, 人不像变色龙那样, 具备将两只眼睛调节到分别看清与人距离及方位均不同的两个物体的本领)。

再分析人看水中之月的情况。

图 2 中, 设 S 为月亮上的一点, MN 及 $\odot O$ 分别是不计厚度的玻璃板及地球上平静的水面。 S'' 为人在水面这个大的“凸面镜”中所看到的与 S 对应像点, $S''B$ 及 $S''D$ 是射向人眼球的两条光线, 易知, AC 两点间的距离接近与人眼球的大小, 不妨设 $AC = 1\text{cm}$, 因为地球的半径 $R = 6400\text{km} = 6.4 \times 10^8\text{cm}$, α 很小时, 有

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \frac{AC}{R} = \frac{1\text{cm}}{6.4 \times 10^8\text{cm}} \text{rad} \approx 1.6 \times 10^{-9} \text{rad},$$

可见, α 是一个度数非常小的角。

$\triangle SAC$ 中, $AC = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, 由余弦定理可求得

$$SA = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin(\beta - \theta)} R. \text{ 由图 2 易知 } \angle 1 = \alpha + (\beta + \alpha) =$$

$\beta + 2\alpha$, $\angle 2 = 90^\circ - (\beta + 2\alpha)$, 根据点 C 坐标 $(R \sin \alpha,$

关于举办“我与高能所”主题征文活动的通知

为庆祝中国科学院高能物理研究所建所 40 周年（1973~2013），进一步弘扬高能所文化，经研究决定面向社会和全所举办“我与高能所”主题征文活动。

一、征文主题：全面回顾高能所 40 年成长、改革、发展、创新的光辉历程，展示新时期高能所人的精神风貌。

二、活动对象：全所职工（包括离退休老同志）和在学研究生以及曾经在高能所工作、学习、生活过的同志。

三、文章征集：文体、篇幅不限。投稿请寄电子邮箱：info@ihep.ac.cn，邮件中请注明作者姓名、工作单位、联系电话等信息，并在邮件主题中标明

“征文”字样。除特别声明，均视为作者同意征文投稿结集出版和在媒体刊登等。征文活动截止日期为 2012 年 12 月 31 日。

四、征集评选：征文设一等奖、二等奖、三等奖，另可根据实际情况设立特别奖若干名。所庆活动工作小组将组织征文的评选，优秀征文在高能所网站和《现代物理知识》的所庆专栏中刊登，并在所庆纪念大会上颁发证书和奖励。

希望大家积极参与到征文活动中来，共同描绘高能所风采。

联系人：王晨芳 王欢

联系电话：010-88235007 010-88236288

$-R(1-\cos\alpha)$ 可确定直线 $S''C$ 方程为

$$y+R(1-\cos\alpha)=\cot(\beta+2\alpha)\cdot(x-R\sin\alpha)$$

继而可求出直线 $S''C$ 与直线 AB (AB 解析式为：

$y = \cot\theta \cdot x$) 交点 S'' 横坐标为：

$$x'' = \frac{-1 + \cos\alpha - \cot(\beta + 2\alpha)\sin\alpha}{\cot\theta - \cot(\beta + 2\alpha)} R$$

$\therefore S'$ 的横坐标为： $x' = -SA \cdot \sin\theta$

$\therefore S''$ 、 S' 两点横坐标之差：

$$x'' - x' = SA \cdot \sin\theta + \frac{-1 + \cos\alpha - \cot(\beta + 2\alpha)\sin\alpha}{\cot\theta - \cot(\beta + 2\alpha)} R$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\beta - \theta)} R \cdot \sin\theta$$

$$+ \frac{-1 + \cos\alpha - \cot(\beta + 2\alpha)\sin\alpha}{\cot\theta - \cot(\beta + 2\alpha)} R$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时， $\sin\alpha = \alpha$

$$x'' - x' \approx R\alpha \frac{\cos\beta\sin\theta}{\sin(\beta - \theta)} - R\alpha \frac{\cot\beta}{\cot\theta - \cot\beta}$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\theta - \cos\beta\sin\theta\cot\beta - \cos\beta\cos\theta + \cot\beta\cos\beta\sin\theta}{\sin(\beta - \theta)(\cot\theta - \cot\beta)}$$

$\times R\alpha = 0$

所以 S'' 与 S' 重合。这就是说，由点光源发出的射向凸面镜的光线，经其反射后再进入人的眼睛，进入眼睛的最大光束“外围”的两入射点，与球面球心连线的夹角（即这两点连线所对的圆心角）度

数越小，点光源的像距与物距的差就越小，当该角度与 0 非常接近时，我们可近似认为像距与物距相等。此时，占有一定空间的物体在凸面镜中所成的像，与物体大小的差别也将很小，可近似认为像与物大小相等。

从上面的计算可知，人看物体在平静的水面这个“凸面镜”中的像时，由物点发出、经镜面反射进入眼睛的最大光束，其“外围”的两入射点连线所对“凸面镜”的圆心角（即图 2 中的 α ），度数非常的小，还不到十亿分之二弧度！因此，物体在平静的水面这个“凸面镜”中所成的虚像，与物体的大小非常的接近，完全可认为是等大的。

看起来，将平静的水面视为平面镜是正确的，所以，人们所看到的水中之月与天上的月亮大小可认为是一样的。

需要说明的是，我们将平静的水面视为平面镜是有条件的——观察者的眼睛与地球的半径相比，必须非常的小，也只有如此，进入观察者眼睛的反射光线的光束，对应的反射面所对地球球心的圆心角才能足够小。假如地球上有一“巨人”观察者，眼睛有月球那么大，那么，该“巨人”所看到的水中物体的倒影，将是比物体小很多的虚像，此时，“巨人”所看到的水中之月将不再与天上的月亮等大，而是比天上的月亮小了许多。

（安徽省太和县宫集镇中心学校 236652）