

卫星上的钟

——兼谈参照系的选择

杨大卫

通过前文（本刊 2012 年第 3 期第 50 页《现代物理知识》）对卫星上的钟与地面钟的比较，朋友们已经看到这两只原来已校准的钟之所以示数出现差异的两种原因：一是“动钟变慢”的狭义相对论效应，二是“重钟变慢”的广义相对论效应。

前者，静系（ $v=0$ ）中的观者测得速度为 v 的动钟的视时 Δt_1 与其固有时 $\Delta \tau_1$ 的关系为

$$\Delta t_1 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \Delta \tau_1 > \Delta \tau_1; \quad (1)$$

后者，无穷远处（ $\varphi=0$ ）的观者测得位于球对称引力场中引力势为 φ 处的钟的“视时” Δt_2 与其固有时 $\Delta \tau_2$ 的关系为

$$\begin{aligned} \Delta t_2 &= (1 + 2\varphi/c^2)^{-1/2} \Delta \tau_2 \\ &= (1 - 2GM/rc^2)^{-1/2} \Delta \tau_2 > \Delta \tau_2. \end{aligned} \quad (2)$$

那么，两种效应的综合结果，究竟卫星上的钟比地面的钟是快还是慢呢？二者之差又是多少呢？为得到这一结果，我们应先建立适当的统一的参照系。

地心-恒星参照系

大家时常选地面为参照系，由于实验室一般固定于地面上，故又称实验室参照系。不过地面随地球的自转和公转在做变速运动，如果仍以地面为参照系，其运动规律会对在惯性系中得到的规律（如(1)式）有所偏离。

在高中阶段，许多学生认为研究人造卫星的运动要以地心为参照，研究行星的运动要以日心为参照。可是大家认真思考一下，就会发现这种选择与“以表轴为参照来考察表针的运动”一样是行不通的，原因很简单，因为没有带刻度的表盘，根本就不可能判断表针是否在运动。只有在表盘的刻度背景上，我们才能判断和度量表针的运动。

地球就像一座钟机，不停地绕地轴转动，实验室、望远镜、月球、人造卫星等就像各根指针或指针的端点一样，以不同的速度在运动。用什么来做度量这些运动的“刻度盘”呢？答案是“众多恒星的星空

背景”。以地心为坐标原点 O ，自地心始向着恒星的无穷远背景上的某些特殊点引坐标轴 Or ，这种坐标系所对应的参照系就是“地心-恒星参照系”（图 1）。

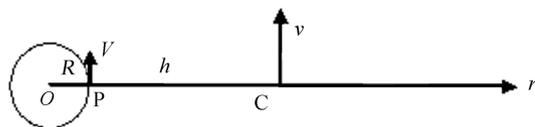


图 1 地心-恒星参照系

类似的，以日心为坐标原点，可自日心始向着恒星的无穷远背景上的某些特殊点引坐标轴，这种坐标系所对应的参照系就是“日心-恒星参照系”。

可以证明，所选的背景天体越遥远，该参照系就越接近理想惯性系。例如，以远离银河系的河外射电源为背景天体所建立的参照系，就是很好的惯性系。

下文利用公式(1)和(2)所计算的结果，都是在“地心-恒星参照系”中距地心 O 无穷远的静止观测者 S 所看到的相对论效应。注意，坐标轴 Or 并不随地球的自转而转动。

狭义相对论效应所产生的“时差”

图 1 中， v 是卫星上的钟 C 相对于“地心-恒星参照系”的速度，它大于地面上 P 点（由于地球自转）相对于“地心-恒星参照系”的速度 V 。

据公式(1)，由 S 测得的卫星钟的“视时” t_1 和地面钟的“视时” T_1 与固有时 T_0 的关系分别为

$$t_1 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} T_0,$$

$T_1 = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} T_0$ ，两式相除并利用当 $|x| < 1$ 时 $(1+x)^{1/n} \approx 1+x/n$ ，可得

$$\begin{aligned} t_1/T_1 &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (1 - V^2/c^2)^{1/2} \\ &\approx (1 + v^2/2c^2)(1 - V^2/2c^2) \\ &\approx 1 + v^2/2c^2 - V^2/2c^2, \end{aligned}$$

即 $t_1 - T_1 = (v^2 - V^2)T_1/2c^2 > 0$ 。 (3)

若 $v \ll V$ ，且 $R = 6380 \text{ km}$ ， $h = 2.00 \times 10^4 \text{ km}$ ， $r = R+h$ ，

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $v = (GM/r)^{1/2} = R(g/r)^{1/2} \approx 4 \text{ km/s}$, $V \approx 0.5 \text{ km/s}$, $T_1 = 24 \text{ h}$, 则 $t_1 - T_1 \approx 7.6 \mu\text{s}$, 这说明狭义相对论效应导致卫星上的钟比地面钟慢。卫星的速度越快, 卫星钟的走时节奏就越慢。

广义相对论效应所产生的“时差”

设图 1 地球引力场中, 卫星上的钟 C 的引力势为 $\varphi = -GM/(R+h)$, 它高于地面上 P 点的引力势 $\Phi = -GM/R$, 即 $\varphi > \Phi$ 。

据公式 (2), 由 S 测得的卫星钟的“视时” t_2 和地面钟的“视时” T_2 与固有时 T_0 的关系分别为

$$t_2 = (1+2\varphi/c^2)^{-1/2} T_0,$$

$$T_2 = (1+2\Phi/c^2)^{-1/2} T_0,$$
 两式相除且注意到

$$\left|2\varphi/c^2\right| < \left|2\Phi/c^2\right| = 2GM/c^2R < 1 \text{ 可得}$$

$$t_2/T_2 = (1+2\varphi/c^2)^{-1/2}(1+2\Phi/c^2)^{1/2}$$

$$\approx (1-\varphi/c^2)(1+\Phi/c^2)$$

$$\approx 1+\Phi/c^2-\varphi/c^2,$$

$$\text{即 } t_2 - T_2 = (\Phi - \varphi)T_2 / c^2$$

$$= [(R+h)^{-1} - R^{-1}] GMT_2 / c^2 < 0. \quad (4)$$

$$\text{又 } \because GM = gR^2, \therefore t_2 - T_2 = -gRh(R+h)^{-1} T_2 / c^2.$$

若 $R = 6380 \text{ km}$, $h = 2.00 \times 10^4 \text{ km}$, $T_2 = 24 \text{ h}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 则 $t_2 - T_2 \approx -45.5 \mu\text{s}$, 这说明广义相对论效应导致卫星上的钟比地面钟快。在天体的引力场中, 钟离天体越近, 引力势越低, 引力场越强, 钟的走时节奏就越慢。

结果与讨论

狭义相对论效应导致卫星上的钟比地面钟慢, 广义相对论效应导致卫星上的钟比地面钟快, 二者的综合效应为 $t - T = t_1 - T_1 + t_2 - T_2 = 7.6 \mu\text{s} - 45.5 \mu\text{s} \approx -38 \mu\text{s}$, 即卫星钟的走时 t 比地面钟的走时 T 每天快

约 $38 \mu\text{s}$ 。以一年 365 天计, 每年大约快 14 ms 。如何校正各种相对论效应产生的时间计量的差, 对应用现代科技的卫星导航是十分重要的。大家可以利用上述方法, 再做一做《普通高中课程标准实验教科书·物理·选修 3-4》(人民教育出版社 2010 年 4 月第 3 版) 第 104 页第 5 题, 以加深对相对论的理解。

如果选择地面参照系, 就会忽略公式 (3) 与 (4) 中的 $(\Phi - V^2/2) T/c^2$, 结果使 $t - T \approx (v^2/2 - \varphi) T/c^2$, 虽对地球误差极小; 但对质量较大, 自转较快的木星, 大家计算一下, 误差如何? 而对于质量很大, 体积很小, 自转较快的天体, 其表面引力势 $\Phi = -GM/R$ 和表面线速度 V 的数值就更可观了, 例如对白矮星、中子星等致密天体。

进一步讨论, 可以思考: 为什么“动钟变慢”的狭义相对论效应与“重钟变慢”的广义相对论效应对钟的走时节奏的影响相反? 这是因为卫星绕地球转动时, 受到非惯性系中的惯性离心力, 该力与卫星所受到的重力方向相反, 根据广义相对论的“等效原理”, 惯性离心力场与万有引力场局部等效, 上述惯性离心力场相当于叠加一个反向的引力场, 从而削弱了原天体的引力场。

总之, 连续三篇关于卫星钟走时节奏的讨论, 使我们认识到: 时间是与物质及其运动紧密联系着的, 时间的量度既与观察者的运动状态有关, 又与物质分布及其运动状态有关。下一篇介绍黑洞“视界”的习题会使朋友们进一步体会到不仅时间如此, 空间的度量和几何性质也与物质及其运动紧密联系着。这一奇妙的结论使许多学子着迷。

(河北师范大学空间科学系 050023)



科苑快讯

脑神经其实是网格结构

很多人都认为脑神经之间的联系过于复杂, 看起来非常混乱。

然而, 事实上它们是网格结构。利用弥散磁共振成像技术, 马萨诸塞州总医院 (Massachusetts General Hospital) 的维丁 (Van Waden) 和同事发现神经纤维所在平面在大脑中被折叠成直角或是其他形状, 使大脑神经成为一个 3D 网络, 如同一盘意大利面。

较高等的灵长类的脑神经网络则更为弯曲折叠。这一成果对人类大脑的研究有着重要意义, 有助于理解大脑的进化。这种网络结构使大脑逐步添

加新功能变得简便易行, 相对简单的输入指令便可制造出非常复杂的大脑, 类似于建筑工人在一栋建筑上建造新的楼层。



(高凌云编译自 2012 年 5 月 31 日《欧洲核子中心快报》)