

对称性和群论方法

马中骥

2011 年是群论的创始人埃瓦里斯特·伽罗瓦 (Evariste Galois, 1811~1832) 诞辰 200 周年。伽罗瓦是一位天才的数学家,但刚过 20 岁就不幸死于一场愚蠢的决斗。伽罗瓦在决斗的前一夜,还在匆匆完成他的伟大数学创造。他创建了群论,并用群论证明了代数方程能用根式求解的条件,证明了一般的五次和五次以上代数方程不能通过有限次加、减、乘、除和开方来精确求解。

自古以来,就有不少人研究过代数方程的根式求解问题(关于代数方程根式求解的资料来自李世维著《代数方程与置换群》,上海教育出版社,1981)。求解一次代数方程非常简单。古代的巴比伦人就会用配方法求解二次代数方程。1514~1515 年意大利数学家菲尔洛 (S.D. Ferro, 约 1465~1562) 找到了求解三次代数方程的方法,但没有发表。后来意大利数学家塔塔里亚 (N. Tartaglia, 约 1499~1557) 重新发现,并透露给意大利数学家卡当 (H. Cardano, 1501~1576)。1545 年卡当总结了前人的结果,将一般形式的三次代数方程求解公式公布在代数著作《大法》中,后人常称卡当法。这本书也介绍了卡当的学生费拉利 (L. Ferrari, 1522~1562) 提出的求解四次代数方程的方法,后人称为费拉利法。除了卡当法和费拉利法外,还有人找到代数方程的一些其他求解方法。

以后的两百多年,包括著名数学家欧拉 (L. Euler, 1707~1783) 在内的许多数学家,花费了不知多少精力来研究五次代数方程根式求解问题,但都以失败告终。直到 1770 年法国数学家拉格朗日 (J. Lagrange, 1736~1813) 才开始意识到求解一般五次方程的代数方法可能是不存在的,第一次正确地指出根的排列和置换是解代数方程的关键所在。

德国大数学家高斯 (K. F. Gauss, 1777~1855) 在 1799 年证明了代数的一个基本定理,就是 n 次代数方程必定恰有 n 个根。这定理只指出根的存在,并没有给出具体求根的方法。当时还是大学生的挪威数学家阿贝尔 (N.H. Abel, 1802~1829) 于

1824 年做出了“五次代数方程代数解法不可能存在”的正确证明。而伽罗瓦证明了不能用代数方法求解的具体方程式的存在,彻底阐明了代数方程可用代数方法求解的原理,并创建了代数学中的一个重要分支——群论。

群论是研究系统对称性质的有力工具。那么,“对称”是什么?怎么评价一个图形或一个系统的对称性质?我们常说斜三角形很不对称,正三角形比较对称,球形很对称。一个图形或系统的对称性质是用保持图形或系统不变的变换来描写的。球对包含直径的平面的反射,和绕通过球心的轴的任何转动都保持不变。保持球不变的变换显然比保持正三角形不变的变换要多。而保持斜三角形不变的变换只有恒等变换,就是“不变的变换”。

保持一个系统不变的变换称为系统的对称变换。一个系统的对称性质就是用此系统的对称变换的集合来描写。定义两个变换的乘积为相继做两次变换。根据系统对称变换集合的共同性质,抽象出群的概念。对称变换的集合称为系统的对称变换群,对称变换就称为群的元素。如果两个群的元素按某种方式一一对应,而且它们的乘积仍按同一方式一一对应,则从群论观点看,这两个群是一样的,称为同构。如果这种对应是一多对应的关系,则小群称为与大群同态。同态的群只描写原群的部分性质。因为矩阵的集合构成的群比较容易研究,与一个群同构或同态的矩阵群称为该群的表示。通过表示来研究群性质的理论称为群的表示理论。经过以弗罗宾尼斯 (Frobenius) 和舒尔 (Shur) 为代表的许多数学家的努力,在 19 世纪创立了群表示理论,才使群论真正成为研究系统对称性质的有力工具。用群论方法研究系统对称性质的最大优点是不涉及系统的细节,只根据系统的对称性质就可以精确地确定系统许多重要的性质,并可以与实验比较。

19 世纪最需要用群论方法研究的物理问题就是晶体的分类。晶体的基本特征就是晶格在空间的周期性排列,或者说,晶体在空间平移变换下保持

她用物理的情趣，引我们科苑揽胜； 她用知识的力量，助我们奋起攀登！

欢迎投稿，欢迎订阅

《现代物理知识》杂志隶属于中国物理学会，由中国科学院高能物理研究所主办，是我国物理学领域的中、高级科普性期刊。

为进一步提高《现代物理知识》的学术水平，欢迎物理学界的各位专家、学者以及研究生为本刊撰写更多优秀的科普文章。投稿时请将稿件的 Word 文档发送至本刊电子信箱 mp@mail.ihep.ac.cn，并将联系人姓名、详细地址、邮政编码，以及电话、电子信箱等联系方式附于文章末尾。

所投稿件一经本刊录用，作者须将该篇论文各种介质、媒体的版权转让给编辑部所有，并签署《现代物理知识》版权转让协议书（全部作者签名），如不接受此协议，请在投稿时予以声明。来稿一经发表，将一次性酌情付酬，以后不再支付其他报酬。

《现代物理知识》设有物理知识、物理前沿、科技经纬、教学参考、中学园地、科学源流、科学随笔

和科苑快讯等栏目，并于 2009 年增加了彩色中心插页。

2012 年《现代物理知识》彩页进一步增加，每期待价 9 元，全年 6 期 54 元，欢迎新老读者订阅。邮局订阅 邮发代号：2-824。

编辑部订阅 汇款到：北京市玉泉路 19 号乙高能物理所《现代物理知识》编辑部；邮编：100049。

需要过去杂志的读者，请按下列价格汇款到编辑部。1992 年合订本，18 元；1993 年合订本，18 元；1994 年合订本，22 元；1994 年增刊，8 元；1994 年附加增刊合订本，36 元；1995 年合订本，22 元；1996 年合订本，26 元；1996 年增刊，15 元；1997 年合订本，30 元；2000 年附加增刊合订本，38 元；2000 年增刊，10 元；2001 年合订本，48 元；2002 年合订本，48 元；2003 年合订本，48 元；2004 年合订本，48 元；2006 年仅剩 4、5、6 期，每期 7 元；2007~2011 年单行本每期 8 元；2007~2011 年合订本每本 50 元。

不变。就根据这对称性质，充分运用群论方法，俄国物理学家费得罗夫 (Federov) 完成了晶体的分类，指出晶体只有 11 种固有点群，32 种点群，7 种晶系，14 种布拉菲 (Bravais) 格子，73 种简单空间群和 230 种空间群。

20 世纪初量子力学的创立，为群论的发展和應用开辟了广阔的天地。量子力学的基本动力学方程很难求解，迫切需要群论方法根据系统的对称性来简化数学运算，得到物理系统的许多重要信息。大量的实验数据需要群论方法来帮助整理和简化。这是群论和物理学共同发展的大好时期。杨算符 (Alfred Young) 方法把置换群表示理论发展得十分完美。半单李代数分类问题的解决标志着有限维李代数理论的成熟。韦尔 (Hermann Weyl) 和维格纳 (Eugene P. Wigner) 把数学上的转动群和置换群理

论广泛应用到量子力学的原子能谱实验和理论分析中，帮助了量子理论的大发展。正如美国著名数学史家贝尔 (E.T. Bell, 1883~1960) 所说：“无论在什么地方，只要能应用群论，从一切纷乱混淆中立刻结晶出简洁与和谐。群的概念是近世纪科学思想的出色的新工具之一。”

从数学上说，群论继续以自身的规律向前发展。无穷维李代数，带参数的李代数，辫子群等各种新型和抽象的对称性质不断发现和得到深入研究。从物理上说，许多新发现的物质相互作用规律，需要根据群论方法，从对称性研究中获得启示。用群论方法发现的物理系统中隐藏的对称性，大大促进了物理实验和理论的发展。群论方法已成为在物理学第一线从事创新研究的必备数学工具。

(中国科学院高能物理研究所 100049)