DOI:10.13405/j.cnki.xdwz.2012.03.007

卫星上的钟

——三谈势场及其零点的选取

杨大卫

本篇我们以卫星钟所处的球对称万有引力场和“爱因斯坦圆盘”为例，再次谈谈势场零点的选取，并借此论证卫星钟在引力场中变慢的因子为什么是$(1+2\varphi/c^2)^{1/2}$。

一、均匀场与中心对称场的引力势

对地面附近的均匀重力场，场中某点的重力势为 $\varphi=E_p/m=gh$，习惯上规定零点在“地面”，实际上其零点可在任意处，场点对零势面的高度 h 可正、可负、可为零，此时 φ 的零点就是 h 的零点。匀强电场的势 $U=E_p/q=Ed$，与此类似。

将地球近似视为球对称天体。球对称天体周围的引力场中某点的引力势为

$\varphi=E_p/m=-GM/r$，

其零点规定在无穷远处（$r=\infty$），此时场点对引力场中心的距离 r 只能为正，而引力势 φ 只能为负，φ 的零点与 r 的零点是不同的。球对称库仑场的势 $U=E_p/q=-kQ/r$，与此类似。

若球对称天体的半径为 R，场点到天体表面的高度为 h，则该场点的引力势可写作

$\varphi=-GM/r=-GM/(R+h)$。

此时若规定引力势 φ 的零点在 $r=R$，即 $h=0$ 处，并不能给计算带来方便，势函数的形式 $\varphi=-GM/(R+h)$ 并不能由此变成 $\varphi=GM/(R+h)$，见北京大学出版社2009年4月《全国中学生物理竞赛专辑2009》第53页(15)式。

那么对“爱因斯坦转盘”上的惯性离心力场，它的势函数 $\varphi=\varphi(r)$的具体形式又如何呢？

二、爱因斯坦列车、电梯与转盘

爱因斯坦在阐述相对论效应时，所利用的理想实验模型中最著名的有“列车”、“电梯”和“转盘”，分别用来说明惯性系中的狭义相对论效应、平动非惯性系和转动非惯性系中的广义相对论效应。

其中最为大家所熟悉是爱因斯坦列车，站台上的观测者测得的运动速度为 v 的列车钟的走时（视时Δt）与车上列车员测得的这只钟的走时（固有时$\Delta\tau$），二者时长不同：

$$\Delta t=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\Delta\tau>\Delta\tau。\quad (1)$$

参见《普通高中课程标准实验教科书·物理·选修3-4》(人民教育出版社2010年4月第3版)第101页。

爱因斯坦电梯在现行高中课本中已被加速运动的飞船所取代，由此阐明等效原理：“非惯性系中的惯性力与万有引力局部等效”(同前书，第107～108页)。通俗地说，假设该船舱中的装饰与家中一样，那么在家中熟睡着的某人如果不知不觉地被送入加速度为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{g}$ 的飞船中，那么他醒来后就不能辨别出舱中的惯性力场与家中的万有引力场有何区别，手中的闹表自由下落时，其加速度仍然等于重力加速度 $\boldsymbol{g}$。

根据这一原理，利用爱因斯坦转盘上的惯性力 $f=m\omega^2r$ 也可以模仿万有引力，只要转盘的角速度 $\omega=(g/r)^{1/2}$即可。在旋转着的太空站中实现重力模拟，就是这个道理。

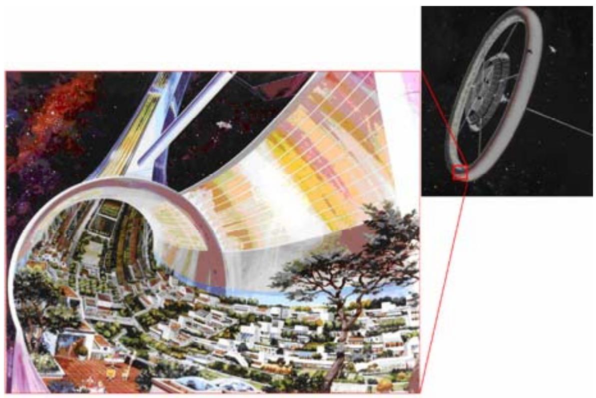

图 1

以上两例，在航天事业高度发达的今天，对那些通过电视片了解熟悉宇航员的孩子们，对那些在科技馆或娱乐场玩过升降梯和太空轮的学生们，这已经不是什么深奥的理论，而是他（她）们的亲身体验。

三、爱因斯坦转盘上的势与钟

现在我们可以计算转盘上惯性离心力的势函数 $\varphi = E_p/m$ 了。这是一个保守力场，保守力所做的功等于相关势能的减少，$W = -\Delta E_p$，故

$\Delta E_p = -W = -f\Delta r$，

图线 $f(r)$ 由下图所示。由盘心到盘缘，离心力 f 移动质点 m 所作的功 W 等于图线 $f(r)$ 跟横轴 r 所夹

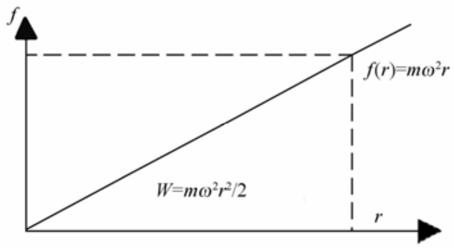

图 2

的直角三角形的面积（底 r×高 $m\omega^2 r/2$），即 $W = m\omega^2 r^2/2$。规定盘心为势能零点，从盘心到速度为 $v=\omega r$ 的盘缘，质点 m 的势能降为

$E_p = 0 - W = -m\omega^2 r^2/2 = -mv^2/2$，

故离心力场的“势”为

$$\varphi = E_p/m = -\omega^2 r^2/2 = -v^2/2。 \quad (2)$$

将(2)代入(1)式，得

$\Delta t = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\Delta\tau = (1+2\varphi/c^2)^{-1/2}\Delta\tau$。

此式意味着，将前述爱因斯坦列车换成半径为 r 的爱因斯坦转盘，盘缘上放置“标准钟”，无论转盘外静止“站台”上的还是站在盘心处（$\varphi=0$）不随转盘运动的观测者，都会看到转盘边缘上($\varphi<0$ 处)的“钟慢”现象。

四、钟在引力场中变慢的因子

根据等效原理，惯性离心势 $\varphi = -\omega^2 r^2/2$ 与球对称引力势 $\varphi = -GM/r$ 局部等效，因此引力场中某地（$\varphi<0$ 处）的固有时

$\Delta\tau = (1+2\varphi/c^2)^{1/2}\Delta t = (1-2GM/c^2 r)^{1/2}\Delta t$ 小于无穷远处（$\varphi=0$）观测者的“视时”Δt。

这就是说，在球对称引力场中，钟放置的位置越低（即引力势越低，引力场越强），在远处的观测者看来它走得就越慢。这就是广义相对论的“钟慢效应”。$(1+2\varphi/c^2)^{1/2}$ 就是钟在引力场中变慢的因子。当 $\varphi \ll c^2$ 时，$\Delta\tau_2/\Delta\tau_1 = 1+\varphi_2-\varphi_1$。

细心的读者自然会想：卫星上的钟（走时 t）比地面上的钟（走时 T）快（$t/T-1 = 46\ \mu s/24\ h \approx 5.3\times10^{-10}$），这是哪位观测者测量的结果？是卫星上的，地面上的，还是遥远太空观测者的测量结果？钟在引力场中变慢的效应究竟是绝对的还是相对的？你想明白了吗？

利用钟慢因子，还可以解释有趣的“引力红移”现象，计算黑洞奇妙的“视界半径”。敬请读者关注下期分晓。

（河北师范大学物理学院　050024）

科苑快讯

世界上最古老的生物

提起最古老的生物，所有人都会想到树，比如加利福尼亚州和内华达州的大盆地狐尾松，有将近 5000 年的寿命。最近，法国海洋开发研究院（IFREMER）和阿尔加维大学（Universidade do Algarve）的阿诺德-哈蒙德（Sophie Arnaud-Haond）和同事在西班牙至塞浦路斯绵延 3500 千米的 40 处海底将波喜荡海藻（如图）的 DNA 取样排序，发现它是地球已知最古老的植物。这种植物像其他海草一样，通过克隆繁殖，所以这种巨大的植物在遗传学上有同样的细胞。

根据这种海草缓慢的生长率估算，研究者估计在遗传学上一致的植物片段就生长在福门特拉岛的15 千米沿岸，寿命长达 8 万～20 万年，使其成为地球已知最古老的植物。

（高凌云编译自 2012 年 3 月《欧洲核子中心快报》）