

# 杨-米尔斯规范场理论的创立

杨建邺

本文从物理学史的角度回忆杨米尔斯理论的提出过程,以及现代物理学家对这个理论的评价,最后谈谈克莱因 1938 年的工作。因为篇幅的限制,不能详谈其中的数学公式的推演。

## 1. 规范场概念的早期历史

20 世纪初,人们只认识到两种相互作用:引力相互作用和电磁相互作用。爱因斯坦在广义相对论中利用坐标不变性的处理得到了引力理论,韦尔(Hermann Weyl, 1885~1955)受到了启发,想寻找一个既能包括引力又能包括电磁相互作用的几何理论,于是深入地研究了麦克斯韦方程组。

麦克斯韦方程组不仅仅可以计算由电荷或磁场产生的电场,以及由电流产生的磁场,这个方程还给出了电磁学里一个重要的守恒定律——电荷守恒。根据诺特定律,电荷守恒应该对应一种对称性。韦尔就想:与电荷守恒对应的是什么对称性呢?1918 年前后,他发现电荷守恒对应的是一种涉及每个点的局域对称性。即麦克斯韦方程组的又一个优美之处是它保证电荷守恒的一种局域对称性,而且它是通过电磁力的固有为来达到这一点的。

电磁场具有局域对称性,即电磁场的每一点都具有某种使麦克斯韦方程组保持不变的数学特性。韦尔在研究这种局域对称性时,提出了一种新的不变性,现在称为“规范不变性”。韦尔进一步证明,引力理论和电磁理论都具有这种不变性。

1929 年,韦尔在一篇决定性的文章里,他把规范不变性确定为“相位因子”变换。这里关键的线索是韦尔认识到量子力学中的“波函数”(wave function)的相位是一个新的局域变量。韦尔还正确地指出:物理系统在这种变换下的不变性被称为  $U(1)$  对称性。这是一种比较简单的局域对称性,又因为空间任意两点的相位因子可以对换,因而又被称为阿贝尔对称性(Abelian symmetry)。正是这种规范不变性(即电荷守恒)决定了全部电磁作用。

这样,一直处于被动角色的对称性,开始具有主动性的品格。

杨振宁是从泡利 1941 年的文章里才得知韦尔的理论,得知韦尔这一非常重要的物理学思想——电荷守恒决定了全部电磁作用。泡利在他的 1941 年颇有影响的论文中指出:只要系统具有  $U(1)$  群的规范对称性,就必然要求系统的粒子之间存在电磁相互作用。韦尔的规范理论还有一个十分重要的结论:所有规范相互作用必须通过规范粒子来传递。这些结论对杨振宁有很大的吸引力,在回忆中他写道:“韦尔的理论已成为规范理论中的一组美妙的旋律。当我在做研究生,正在通过研读泡利的文章来学习场论时,韦尔的想法对我有很大的吸引力。”

但是也正如杨振宁所说:“1929 年以后,大家同意以规范理论的观点来看电磁现象是很漂亮的数学观点,可是并没有引出任何新物理结果。”

韦尔的思想“并没有引出任何新物理结果”,是因为韦尔发表论文的时候,人们还没有正确地认识原子核的组成,更不用说有强相互作用的概念,因此韦尔理论新的应用时机尚未成熟。但是他为人们留下了宝贵的遗产,那就是规范变换和局域对称性思想。

杨振宁被韦尔美妙的理论吸引之后,就产生了一个大胆而诱人的想法:把韦尔主要从电荷守恒定律中发现和提出的规范不变性,推广到其他守恒定律中去。当时守恒定律很多,推广到哪一个守恒定律中去呢?经过认真思考和仔细研究,杨振宁认为在粒子的强相互作用中的同位旋(isospin)守恒与电荷守恒有相似之处,因为它们都反映了系统内部的一种隐藏的对称性。同位旋是基本粒子的重要性质之一,用来区分原子核里如质子、中子等基本粒子的一个物理量。实验表明,原子核里的强相互作用具有与电荷无关的特性,例如质子与质子、中子与中子及质子与中子之间的强相互作用是相同的,

这说明就强相互作用而言，质子与中子之间没有区别。因此，德国物理学家海森伯（Werner Heisenberg, 1901~1976）于1932年提出，由于质子和中子如此相似，我们可以把它描写为一种粒子，即把质子和中子看成同一种粒子的两种不同状态。在同一组中的粒子，质量很接近，宇称相同，但电荷不同，它们都可以看作是同一粒子处于不同的态。如质子、中子为两重态； $\pi^+$ 、 $\pi^0$ 、 $\pi^-$ 为三重态等。为描述这种两重态或多重态的性质，引进了一个称为“同位旋”的新物理量，它的量子数用 I 表示。同位旋在物理学中的主要意义在于，当粒子在强相互作用下发生碰撞时，它们的同位旋守恒（isospin conservation）。这就是说，在强相互作用的过程中总同位旋值保持不变；在弱相互作用和电磁作用过程中，同位旋不守恒。这一法则有助于物理学家加深他们对物理基本规律的理解。因此，杨振宁首先试图将规范不变性推广到同位旋守恒定律中去，即将同位旋局域化，并研究由此而产生的相互作用。在1982年的文章里，杨振宁写道：“规范不变性决定了全部电磁相互作用这个事实本身，给我的印象更深。在芝加哥时，我曾试图把这种观念推广到同位旋相互作用上去……走入了困境，不得不罢手。然而，基本的动机仍然吸引着我，在随后几年里我不时回到这个问题上来，可每次都在同一个地方卡壳。当然，对每一个研究学问的人来说，都会有这种共同的经验：想法是好的，可是老是不成功。多数情况下，这种想法要么被放弃，要么被束诸高阁。但是，也有人坚持不懈，甚至走火入魔。有时，这种走火入魔会取得好的结果。”

梁昌洪教授在他的《话说对称》一书里，作了一个表：

电荷守恒	同位旋守恒
电荷（电磁场场源）	强作用的“荷”
$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu}$	?
守恒的电荷要产生电磁场	守恒的强作用“荷”要产生杨-米尔斯场
阿贝尔理论	非阿贝尔理论非交换李群

杨振宁在“走火入魔”中，每一次的努力都在同一个地方卡壳，卡壳的原因是头几步的计算很成功，可是推广的时候，总是导出一个冗长丑陋的公式，使得他不得不把这个想法搁置下来。虽累经失

败，杨振宁却一直不肯放弃。到1954年这种执着和走火入魔，真的是“取得好的结果”了。

## 2. “走火入魔”和伟大的成果

一般人都知道，杨振宁与李政道一起于1957年获得诺贝尔物理学奖，这次获奖是因为他们“对宇称定律的深入研究，它导致了有关亚原子粒子的重大发现”。但杨振宁最重要的贡献不是宇称定律的研究，而是1954年前后对于“规范场理论”的研究。正是这一研究，杨振宁在芝加哥大学的导师特勒（Edward Teller, 1908~2003）在1982年就说：“如果不提及杨振宁和米尔斯关于把规范不变性推广到同位旋及不可对易变量的那篇著名论文，我就无法谈杨振宁的研究工作。归根结蒂，他们的这篇文章已经成为几乎所有进一步讨论的基础。”

1993年，声誉卓著的“美利坚哲学学会”将该学会颁发的最高荣誉奖富兰克林奖章（Franklin Medal）授予杨振宁，授奖原因是因为“杨振宁教授是自爱因斯坦和狄拉克之后20世纪物理学出类拔萃的设计师”，表彰杨振宁和罗伯特·米尔斯合作所取得的成就；并指出这一成就是“物理学中最重要的事件”，是“对物理学影响深远和奠基性的贡献”。

1994年，美国富兰克林学会将鲍尔奖金颁发给杨振宁，文告中明确指出，这项奖授予杨振宁，是因为他“提出了一个广义的场论，这个理论综合了自然界的物理定律，为对宇宙中基本的力提供了一种理解。作为20世纪理性的杰作之一，这个理论解释了亚原子粒子的相互作用，深远地重新规划最近40年物理学和现代几何学的发展。这个理论模型，已经排列在牛顿、麦克斯韦和爱因斯坦的工作之列，并肯定会对未来几代人产生相类似的影响。”

上面提到的“一个广义的场论”和“这个理论模型”，指的就是杨振宁和米尔斯合作提出来的“非阿贝尔规范场理论”，或者称为“杨-米尔斯理论”。由鲍尔奖的文告中我们可以清楚地看出，科学界在该理论提出近半个世纪后，终于认识到了它的终极价值。在科学界的共识中，已经把杨振宁的这一贡献和物理学历史上最伟大的几位科学家牛顿、麦克斯韦和爱因斯坦的贡献，相提并论，等量齐观，那么，杨振宁到底怎么“走火入魔”的呢？这段历史受到人们极大的关注。

1952年12月中旬，杨振宁收到布鲁克海文国家实验室高能同步稳相加速器（Cosmotron）部主任

柯林斯 (George B. Collins) 的一封信, 邀请他到他们实验室作一年的访问学者; 1953 年夏天, 杨振宁全家搬到了布鲁克海文实验室。

这时实验室不断有新的粒子发现, 杨振宁也参与了其中的一些实验。正是这些实验唤起了潜伏在杨振宁心中多年的思考, 激励他追寻一个暂时还不清晰的目标。杨振宁说:“随着越来越多介子被发现, 以及对各种相互作用进行更深入的研究, 我感到迫切需要一种在写出各类相互作用时大家都应遵循的原则。因此, 在布鲁克海文我再一次回到把规范不变性推广出去的念头上来。”

功夫不亏有心人。这一次是他和同一办公室的米尔斯一起讨论他的这一长期感兴趣的老问题。罗伯特·米尔斯那时是哥伦比亚大学克劳尔 (Norman Kroll, 1922~2004) 教授的博士研究生, 后来成为俄亥俄州立大学的教授。这一次他们决定尝试在电磁规范场强  $F_{\mu\nu}$  上加一个二次多项式, 如果不行再尝试加三项式等。没有想到的是在加上一个简单的二项式之后,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} + [B_\mu, B_\nu]$$

结果没有再像以前那样出现越来越复杂的项, 相反, 以后的计算就“越算越简单, 我们知道我们挖到了宝贝!!!”于是他们顺利写出了《同位旋守恒和一个推广的规范不变性》及《同位旋守恒和同位旋规范不变》两篇文章, 分别发表在《物理学评论》1954 年 95 和 96 卷上。

人们对杨振宁和米尔斯如何共同克服以前一直不能克服的困难, 抱有很大的兴趣。在 2005 年由特霍夫特<sup>①</sup>主编出版的《杨-米尔斯理论 50 年》一书中, 杨振宁应特霍夫特的请求写了一篇短文, 这篇短文是杨振宁为 1947 年写的文章“规范不变性和相互作用”的一个注释。在这篇短文里杨振宁写道:

“杰拉杜斯·特霍夫特希望我为非阿贝尔规范理论的早期起源写一点东西。我寻找过去的文件, 发现了几页以前写的文章, 我把它贡献给他在编著的书中。

这几页文章写于 1947 年 3 月, 那时我还是芝加哥大学研究生。像我那一代的研究生一样, 我们很熟悉泡利在 1933 年《物理手册》中的文章和 1941 年发表于《现代物理评论》上的文章, 但是我们却

不太熟悉韦尔 1929 年的文章。

我那时非常专注于一个非常重要的问题。不幸的是我所做的计算, 在此后几年里一直没有得到今天所得到的结果。这些计算总是得到越来越复杂的结果, 最后总是以失败告终。一直到 1953~1954 年当我和罗伯特·米尔斯重新回到这个问题, 并且把场强  $F_{\mu\nu}$  加上一个二次项的时候, 一个美妙的理论产生了。米尔斯和我在多年以后才明白, 从数学观点看这个二次项事实上非常自然。”

用群论的语言讲, 杨振宁和米尔斯采取了一个关键和绝妙的步骤——他们用群论里的 SU(2) 群代替了麦克斯韦方程组里的 U(1) 群。我们知道, 与麦克斯韦方程组相关联的群是 U(1) 群, 它是阿贝尔群 (abelian group), 即是可以交换的 (例如, 平面上任意两个相继的旋转可以变换次序进行而不影响结果); 而与杨-米尔斯方程相关联的群是 SU(2) 群, 它是不可交换的, 即他们的理论是“非阿贝尔”规范理论 (non-abelian gauge theory)。而且这种 SU(2) 规范理论很容易推广到其他非阿贝尔规范理论, 因此统称为非阿贝尔规范理论, 或杨-米尔斯规范理论 (Yang-Mills gauge theory), 这是继麦克斯韦和爱因斯坦之后, 提出了一种新的场论。从此, 规范场的研究进入了一个崭新阶段。这时规范场的量子——规范粒子, 按照 SU(2) 群应该有三个, 其中一个带正电, 一个带负电, 还有一个不带电; 粒子场通过交换这些规范粒子便引起新的相互作用。这是在爱因斯坦利用广义协变原理 (也是一种局域对称性原理) 得到引力作用之后, 物理学家再一次纯粹利用对称性原理给出具体相互作用规律。这是现代物理学中的一次伟大跨越, 用杨振宁的话就是“对称性支配相互作用” (symmetry dictates interaction)。

杨-米尔斯理论的重要价值, 派斯在他的《基本粒子物理学史》一书中说:“杨振宁和米尔斯在他们杰出的两篇文章里, 奠定了现代规范理论的基础。”

2006 年英国出版了一本书——《天地有大美——现代科学之伟大方程》(It Must be Beautiful: Great Equations of Modern Science), 书中第七章是克莉丝汀·萨顿 (Christine Sutton) 写的“隐对称性: 杨-米尔斯方程”, 她在文章开篇第一段就写道:“1953 年, ……两个年轻人因共用长岛的布鲁克海文实验室的一间办公室而相遇了。就像罕见的行星列阵那

样，他们短暂地通过了时空的同一区域。这一时空上的巧合诞生了一个方程，这个方程可构成物理学圣杯——‘万物之理’——的基础。”

什么是“圣杯”？圣杯（Holy Grail）传说是基督被钉在十字架上时用来盛接基督鲜血的杯子；“寻找圣杯”一直就成为寻求与上帝的神秘结合；而且只有最伟大的人物才能够寻到和直视圣杯，并看见人类语言无法形容的神圣奥秘。

无独有偶，美国斯坦福大学数学系教授基思·德夫林（Keith Devlin）在 2006 年写了一本更有趣的书《千年难题——七个悬赏 1000000 美元的数学问题》，其中 66 页的标题是“现代物理学的圣杯”，他指的也是杨-米尔斯理论。

把杨-米尔斯理论看成是“物理学的圣杯”，可见它的非同一般的重要性。但是也正如克莉丝汀所说，在 20 世纪 50 年代，杨-米尔斯理论却似乎和现实几乎没有什么瓜葛，直到 20 世纪 70 年代以后，属于它的时代才到来了——它构成了获 1979 年、1999 年和 2004 年三项诺贝尔物理学奖成果的理论基础。

### 3. 克莱因 1938 年的工作

一般探讨规范场理论的文章，不太关注到克莱因的研究。杨振宁在《对称性与物理》一文曾经解释过这一问题。

克莱因（Oskar Klein, 1894~1977）是瑞典物理学家，在 20 世纪 20 年代量子力学诞生的岁月里，他是一位重要的开拓者。20 世纪 50 年代，克莱因访问普林斯顿高等研究所以后，杨振宁认识了他，以后两人关系很好。1988 年，瑞典物理学家爱克斯朋（Gösta Ekspong）建立“克莱因纪念讲座”，并且请杨振宁去做过开场的两次演讲。其中一次讲的是《对称与物理学》（Symmetry and Physics），另一次是《从贝特-于尔丹假说到杨-巴克斯特方程》（From the Bethe-Hulthen Hypothesis to the Yang-Baxter Equation）。在《对称与物理学》的演讲中，杨振宁多处谈到克莱因的研究。

克莱因在 1938 年华沙一次物理学会议上提出一个场论，因为这个场论包含一个非线性项，有一些近似非阿贝尔规范理论的非线性项。这件事在 20

世纪八九十年代被瑞典物理学家瑟西莉娅·加尔斯科格（Cecilia Jarlskog）“发现”，于是不少物理学家开始发表文章，试图解释何以克莱因的文章以前没有被人们注意到。杨振宁在演讲中理所当然地要提到克莱因的这篇文章。他一方面肯定了克莱因的贡献，另一方面也指出克莱因文章没有受到广泛关注的原因所在。首先他指出克莱因是怎样得到非线性项的：“克莱茵是怎样得到这些项的呢？答案在于，他从卡鲁扎-克莱因（Kaluza-Klein）理论出发，该理论建立在广义相对论的基础上。具有非线性项。”

卡鲁扎-克莱因理论是德国数学家西奥多·卡鲁扎（Theodor Kaluza, 1885~1954）和克莱因提出的，这个理论最初只是应用于电磁力和引力的统一。1921 年，卡鲁扎把广义相对论延伸至一个五维时空，他由此得到好几组方程式，其中一个与爱因斯坦引力场方程式等价，其他组方程式则与麦克斯韦电磁场方程组等价。1926 年，克莱因对卡鲁扎理论做了一些发展。

正因为卡鲁扎-克莱因理论建立在广义相对论基础上，必然导致他们不可能导致规范变换。杨振宁指出：“爱因斯坦的广义相对论是对称被用来主动地决定相互作用的第一个例子。用今天的语言来说，爱因斯坦把切丛（the tangent bundles）<sup>①</sup>用于他的对称。切丛由于比其他丛更难以捉摸，因而难以用来推广到其他丛。这就是薛定谔（E. Schrödinger, 1887~1961）、克莱因和其他许多人在本世纪 20 年代和 30 年代立足于广义相对论的工作为什么没有导致一般规范理论的缘由。”

正是因为克莱因的研究没有发现规范变换，所以他的工作没有受到人们的关注。这才是问题关键所在。

杨振宁对克莱因 1938 年论文的评价应该是令人信服和中肯的。

（华中科技大学物理系 430074）

---

<sup>①</sup>特霍夫特（Gerardus't Hooft, 1946~），因为规范场理论的重整化于 1999 年获得诺贝尔物理学奖。

<sup>②</sup>“切丛”是微分几何中最重要的概念之一，与之对偶的概念是余切丛。很多重要的几何性质都和切丛及余切丛有关。它是研究微分几何的重要工具。