

# 卫星上的钟

## ——再谈势场及其零点的选取

杨大卫

上篇我们以离子键晶体中的库仑势场(静电场)为例,谈了势能零点的相对性——势能的零点可以根据实际情况来规定,系统的两确定状态间的能量差并不因零点的变动而改变。如果规定 KCl 晶体中  $K^+$  离子与  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能为零,那么  $K^+$  离子与距离无穷远的  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能为  $E_K - E_{Cl} = 4.34eV - 3.62eV = 0.72eV$ ; 如果规定  $K^+$  离子与距离无穷远的  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能为零,那么 KCl 晶体中  $K^+$  离子与  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能则为  $E_p = E_{Cl} - E_K = -0.72eV$ 。两状态间的能量差等于  $0.72eV - 0 = 0 - (-0.72eV) = 0.72eV$  不变。

但我们不能因此而误解,认为静电势能表达式  $E_p = -kQq/r$  的零点,可以像匀强电场中的势能表达式  $E_p = qU = qEd$  那样,零点上下高低移动后,函数的形式仍不变。因为前者是非线性函数,而后者是线性函数。如果规定 KCl 晶体中  $K^+$  离子与  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能为零,静电势能表达式  $E_p = -kQq/r$  就不适用了。若要用  $E_p = -kQq/r$  进行计算,就只能改为以  $K^+$  离子与距离无穷远的  $Cl^-$  离子之间的库仑相互作用势能为零。

本篇再以天体周围的万有引力场为例进一步谈谈势场零点的选取。请见下例。

### 卫星上的钟

已知天上卫星的钟与地面观测站的钟零点已对准。假设卫星在离地面  $h = 2.00 \times 10^4$  km 的圆形轨道上运行,地球为半径  $R = 6.38 \times 10^3$  km 的球体,地面处的重力加速度  $g = 9.81m/s^2$ ,光速  $c = 2.998 \times 10^8$  m/s。

根据广义相对论,钟在引力场中变慢的因子是  $(1 + 2\varphi/c^2)^{1/2}$ ,  $\varphi$  是钟所在位置的引力势(即引力势能与受引力作用的物体质量之比;取无穷远处引力势为零)。试问地上的钟 24h 后,卫星上的钟的示数与地上的钟的示数差多少?

此题取自第 25 届中学生物理竞赛决赛试题(理论部分)第二题第 4 小题的第(II)问,小标题为笔

者所加。

首先,题中明确了引力势  $\varphi$  的概念——引

力势能  $E_p = -GMm/r$  与受引力作用的物体质量  $m$  之比,即  $\varphi = E_p/m = -GM/r$ ,  $r$  为 ( $m$  所在的)场点与引力场中心 ( $M$  所在点) 的距离。如果取质点模型,那么静止质点激发的引力场与点电荷激发的静电场十分相似,二者均为球对称的保守场,无论是引力势  $\varphi = E_p/m \propto r^{-1}$  还是库仑势  $U = E_p/q \propto r^{-1}$ , 其函数表达式相同,都是径向距离  $r$  的反比函数。另外,题目还强调,要取无穷远处的引力势为零,即  $r = \infty$  时  $\varphi = 0$ 。

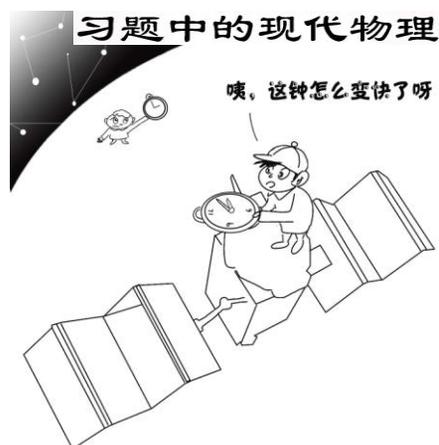
天上到地心的距离  $r$  大于地面到地心的距离  $r_E$ , 即天上的引力势  $\varphi$  高于地面的引力势  $\varphi_E$ , 那么卫星上的钟的走时节奏与引力势有什么关系呢?

题中提示大家“钟在引力场中变慢的因子是  $(1 + 2\varphi/c^2)^{1/2}$ ”, 其意思是说引力场中引力势为  $\varphi$  的地方, 其“固有时”  $d\tau$  与因子  $(1 + 2\varphi/c^2)^{1/2}$  成正比, 即  $d\tau_1/d\tau_2 = (1 + 2\varphi_1/c^2)^{1/2}/(1 + 2\varphi_2/c^2)^{1/2}$ 。

显然,若  $r_2 < r_1$ , 即  $-1/r_2 < -1/r_1$ , 则  $\varphi_2 < \varphi_1$ , 导致  $d\tau_2 < d\tau_1$ 。这就是说,在球对称引力场中,钟放置的位置越低(即引力势越低,引力场越强),它走得就越慢。这就是广义相对论的“钟慢效应”。

设原来有两只都在引力场外(即  $r = \infty$ ,  $\varphi = 0$  的地方)同样校准了的钟,走时相同,其时长均为  $T_0$ 。现在如果仅其中一只钟的位置不变,走时仍为  $T_0$ , 那么另一只被放到引力场中(即  $r < \infty$ ,  $\varphi < 0$  处)的钟,走时就会变慢,其时长为  $t = (1 + 2\varphi/c^2)^{1/2}T_0 < T_0$ 。

个中奥妙,可利用“爱因斯坦转盘”和“等效原理”(参见《普通高中课程标准实验教科书·物理·选修 3-4》,人民教育出版社 2010 年 4 月第 3 版,第 107~108 页)推得。其中所涉及的基础知识不超过现行高中课本。推导过程将在下一期刊出。我们先讨论上述卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数差多少。



由于  $\varphi = E_p/m = -GM/r$ ,  $g = GM/r^2$ , 所以卫星上的钟 ( $r = R+h$ ) 和地面上的钟 ( $r_E = R$ ) 所处位置的引力势分别为

$$\varphi = -\frac{GM}{R+h} = -\frac{R^2}{R+h}g, \quad (1)$$

$$\varphi_E = -\frac{GM}{R} = -gR; \quad (2)$$

那么相应地卫星上的钟的示数  $t$  和地面上的钟的示数  $T$  应分别为

$$t = (1+2\varphi/c^2)^{1/2}T_0, \quad (3)$$

$$T = (1+2\varphi_E/c^2)^{1/2}T_0. \quad (4)$$

故二者示数之差为

$$\begin{aligned} t - T &= [(1+2\varphi/c^2)^{1/2} - (1+2\varphi_E/c^2)^{1/2}]T_0 \\ &= [(1+2\varphi/c^2)^{1/2} - (1+2\varphi_E/c^2)^{1/2}](1+2\varphi_E/c^2)^{-1/2}T \\ &= [(1+2\varphi/c^2)^{1/2}(1+2\varphi_E/c^2)^{-1/2} - 1]T \\ &\approx [(1+\varphi/c^2)(1-\varphi_E/c^2) - 1]T \\ &\approx (\varphi - \varphi_E)T/c^2 = [1 - R/(R+h)]gRT/c^2, \end{aligned}$$

即 
$$t - T = gRhT/(R+h)c^2. \quad (5)$$

将  $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$  以及  $c$ 、 $g$ 、 $R$ 、 $h$  的值代入 (5) 得  $t - T = 46 \mu\text{s}$ 。

以上讨论的仅是广义相对论效应。实际上由于卫星对地面的快速运动, 还会有“动钟变慢”的狭义相对论效应 (参见《普通高中课程标准实验教科书·物理·选修 3-4》, 人民教育出版社 2010 年 4 月第 3 版, 第 101 页)。据此可以进一步计算出两种效应的综合结果。

有兴趣的读者, 还可计算月宫中的钟与地面上的钟二者示数之差  $t_M - T = ?$  (已知月球到地心的平均距离是  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ , 忽略月球引力)。

试将上述习题及讨论与《全国中学生物理竞赛专辑 2009》(北京大学出版社 2009 年 4 月) 第 47~48 页原题及第 53~54 页的解答作对照, 会发现二者有所不同, 关键在于引力势  $\varphi = E_p/m = -GM/r$  的零点。对此将在下期说明, 望读者予以关注。

(河北师范大学物理学院 050016)

### 封面照片说明

当年伽利略用自制的望远镜开启了人类认识宇宙的新纪元, 400 年后的今天, 一架 30 米的巨型望远镜将造在夏威夷岛上的冒纳凯阿火山。望远镜的分块式主镜直径接近 100 英尺 (约合 30 米), 建成后将成为世界上最大的光学望远镜。该项目简称“TMT”, 预计造价 10 亿美元, 计划 10 年完成。这只巨大的“天眼”将使得天文学家能比过去更清晰地看到暗弱的天体, 为人类带来更多有关宇宙的更新、更深层的信息并有望做出重大突破性发现。中国已成为该项目的合作伙伴, 并与多国科学家一道建造世界上最强大的天文台。据悉欧洲的天文学家们也有意建造极大口径望远镜, 届时望远镜口径将达到 42 米。(李之/供稿)

### 封底照片说明

德国航空中心最新研制了一款具有轻重量手臂和四指手, 配备先进导航、相机和传感器的移动机器人系统。这款被称为“贾斯汀”的机器人是理想的太空实验平台, 可实现远程自治控制, 独立的车轮可满足机器人处理任务时上半身的操作。在机器人身体上装配有传感器和相机, 使它能够创建一个 3D 环境结构, 确保机器人能够独立地工作。科学家运用电子系统与网络新技术, 使欧洲宇航局与国际空间站建立连接,

从而实现地面远程控制太空实验。通过最新人类-机械界面技术, 宇航员在太空环境将与机器人共同进行探索工作。科学家们不久将派“贾斯汀”机器人到国际空间站欧洲宇航局哥伦比亚实验室与其他欧洲漫游机器人完成科学实验, 这些漫游机器人将与遥控机器人在月球等行星上进行一系列探索活动。(李之/供稿)

### 科苑快讯

#### 来自真空的光子

两块平行金属板由于真空中的电磁波动而互相吸引, 这就是已被实验证实的静态卡西米尔效应。动态卡西米尔效应则预言, 如果平行金属板在真空中靠近和分开, 就会释放一个真实的光子。这种效应非常微弱, 而且需要金属板靠近的速度接近光速, 不过最近这个现象已被首次发现。

瑞典哥德堡市查尔姆斯工业大学 (Chalmers University of Science and Technology) 的威尔森 (C. M. Wilson) 和同事建造了一条超导传输线, 由于达到相应的长度, 因此可高频 (在 10GHz 以上) 调节超导量子干涉器件的感应系数。该系统模拟来回高速震荡的平行镜子, 如同预言所述, 在真空中释放出光子对。

(高凌云编译自 2012 年 1 月《欧洲核子中心快报》)