

# 静电场中电场力做功

## 与路径无关推导方法的商榷

刘景世



### 1. 问题的提出

现行大学物理教材（吴百诗，《大学物理基础》；张三慧，《大学物理基础学》，以下均简称教材）在证明“静电场中电场力做功与路径无关”的结论时，思路是从库仑定律和叠加原理出发来证明电场力做功与路径无关，即先证明点电荷产生的电场中电场力对试验电荷做功（以下简称电场力做功）与路径无关，然后再证明任意带电体产生的电场中电场力做功与路径无关。在证明任意带电体产生的电场中电场力做功与路径无关时，教材认为任意带电体可分割为无数多个电荷元，每个电荷元可看成点电荷，根据叠加原理和点电荷产生的电场中电场力做功与路径无关的结论，任意带电体产生的电场中电场力做功与路径无关。这种推导方法的言下之意是，每个电荷元产生的场强  $d\mathbf{E}$  均可表达为  $\frac{1}{r^2}$  的函数，而点电荷的电场中电场力做功与路径无关的结论通过简单的数学推导可以证明，因此，任意带电体的电场亦有此结论。

笔者在大学物理教学中体会到这种推导方法是不全面的，在逻辑上不够严密，既难以使人信服，又可能在教学中对学生造成误导。

们必将更加成功。

我们认为，一个重大的科学项目不仅需要被尊重，更需要被质疑。质疑之声才是让科学研究保持健康的良药。而这一切的基础则是公开和坦诚。我们一直以来保持着和国际同行的交流和联系，并及时公开自己的数据处理源程序和结果以接受一切必要的检验。坦诚的态度既带来了严格的质问，也换来了公正的支持，我们相信所有这些对真正的科学进步都是非常有益的。

（中国科学院高能物理所 100049）

23 卷第 5 期 (总 137 期)

### 2. 问题的分析

点电荷产生的电场中“电场力做功与路径无关”的结论是根据点电荷  $q$  在真空中任意一点产生的电场强度的数学表达式是  $\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ，电场力做功

$$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (\text{与路径无关})$$

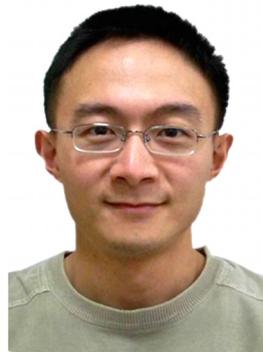
得出来的。然而任意带电体虽可分割成无数多个电荷元，每个电荷元可以看作点电荷，但任意带电体的电场中电场力做功的表达式

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_{r_a}^{r_b} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{r_a}^{r_b} q_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{r_a}^{r_b} q_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_{r_a}^{r_b} q_0 \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

中可能有无穷多项，虽然每一项都有确定的数值，但其和并不一定就有确定的数值（这就像高等数学中发散数列的每一项都有确定的数值，但其和并没有确定的数值一样），若无确定的数值，直接说电场力做功与路径无关也就有些牵强了。另外教材的做法有可能使学生误以为电荷元的场强  $d\mathbf{E}$  能表达为  $\frac{1}{r^2}$  的函数，而任意带电体可以分割成无数多个电荷元，每个电荷元可以看作点电荷，那么叠加后的总场强

### 作者简介

刘浩，男，1980 年生，2003 年本科毕业于中国科技大学，2008 年于中国科学院高能物理研究所获博士学位，现为副研究员。长期从事 WMAP 卫星数据处理研究，在该方面的工作具有一定国际知名度和影响。



也能表达为  $\frac{1}{r^2}$  的函数, 由此可得到所需结论, 实则不然 (如无限长均匀带电直线、无限大均匀带电平面产生的场都不能表达为  $\frac{1}{r^2}$  的函数)。物理学是一门逻辑严密的科学, 笔者认为有必要对这个问题进行比较深入的分析, 以纠正学生在学习过程中可能形成的错误观点。

我们知道, 在任意带电体产生的电场中移动试验电荷  $q_0$  从  $a$  点至  $b$  点时, 电场力做功  $A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。由一般的高等数学教材可知, 要使  $\mathbf{E}$  可积,  $\mathbf{E}$  必须满足一定的条件。以常见的电荷连续分布的带电体——无限长均匀带电直线产生的场为例,  $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ,  $A_{ab} = \frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$ 。当所选路径

通过  $r=1$  或  $r=\infty$  的点时,  $A_{ab} = \frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$  无意义,

不通过  $r=1$  或  $r=\infty$  的点时,  $A_{ab} = \frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$  有具体的数值, 因此并不能直接得到  $A_{ab}$  与路径无关的结论。实际上即使在点电荷的电场中, 积分路径亦不能通过电荷所在处, 否则同样导致  $A_{ab}$  无意义。

那么, 在什么情况下由点电荷的电场中电场力做功与路径无关的结论和叠加原理可得到任意带电体的电场亦有相同结论呢? 一般来说, 只有当电场强度  $\mathbf{E}$  随着到坐标原点的距离  $r$  的增加而不断减弱 ( $E \propto \frac{1}{r^n}$ ), 并且减弱得比较迅速 (满足  $n>1$  的条件) 时,

才能根据  $A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  得出电场力做功与路径无关的结论。不失一般性, 设  $r_a=r$  或  $r_a=\infty$ ,  $E \propto \frac{1}{r^n}$ , 则

$$A_{ab} = \int_r^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{kdr}{r^n} = \frac{k}{1-n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \Big|_r^\infty = \begin{cases} \text{发散} & (n \leq 1) \\ \text{收敛} & (n > 1) \end{cases}$$

( $k$  为常数)。电荷分布在有限区域的带电体的场必然满足  $n>1$  的条件, 而电荷分布在无限区域的带电体的场不一定满足  $n>1$  的条件。教材中论证任意带电体的电场中电场力做功与路径无关时, 在逻辑上不够严密之处就在于不论什么情况下都默认  $\mathbf{E}$  可积, 然后根据叠加原理将其分解为若干个点电荷的场中静电力做功之和, 最后得出所需结论。

### 3. 解决问题的建议

综上所述, 要严密地推导“静电场中电场力做

功与路径无关”的结论, 笔者建议采取的步骤为:

首先, 证明点电荷的电场中电场力做功与路径无关, 这在一般的大学物理教材中都有详细论证过程, 本文不再赘述。

其次, 证明电荷分布在有限区域的带电体产生的电场中上述结论成立 ( $n>1$ )。

在电荷分布区域内任选一点作为坐标原点, 此带电体的电场就是一系列位于原点的点电荷  $\sum dq$ 、电偶极子  $\sum rdq$ 、电四极子……激发的电场之叠加。而点电荷的场 ( $n=2$ ), 电偶极子的场 ( $n=3$ ), 电四极子的场 ( $n=4$ )……必然满足  $n>1$  的条件 (在此教师要向学生说明电多极子的场需要较多的数学知识, 一般在电动力学中讲授, 在大学物理中不易讲授, 但是电多极子的  $\mathbf{E}$  与  $r$  的关系满足  $n>1$  的条件), 积分  $A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  收敛 (必有确定的数值), 因此电荷分布在有限区域的带电体产生的电场中电场力做功与路径无关。

最后, 证明电荷分布在无限区域的带电体产生的电场中上述结论也成立 ( $n \leq 1$  时积分路径不能通过被积函数的奇点)。

这里有两种可能: 一种是  $n \leq 1$  的情况, 但通常讨论的无限大均匀带电平面 ( $n=0$ )、无限大均匀带电直线或圆柱 ( $n=1$ ) 或常见的匀强电场的场强  $\mathbf{E}$  做为被积函数时虽然有奇点存在, 在推导时做必要说明后也可得到我们所需的结论 (讨论区间上有有限个奇点的无界函数积分的收敛性, 总可以归结为讨论若干个小区间上只有一个端点是奇点的无界函数的收敛性, 在教学中只须向学生说明某种场中积分路径不能通过被积函数的奇点即可, 此处不再赘述, 读者若有兴趣, 可分别以  $n=0$  和  $n=1$  进行验证); 另一种是  $n>1$  的情况, 此时电荷分布虽然延伸到无穷远, 但积分  $A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  收敛

(必有确定的数值)。因此电荷分布在无限区域的带电体产生的电场中电场力做功与路径无关。

笔者认为, 上述推导过程逻辑上比较严密一些, 是对教材推导方法的有益补充, 在教学中也容易使学生信服。在教学中适当地变换传统的教学程序, 容易引起学生的注意, 所传授的教学内容易于被学生接受, 训练了学生的逆向思维能力, 提高了学生分析问题、解决问题的能力。

(陕西省宝鸡文理学院物理与信息技术系 721016)