莫比乌斯与反演问题

约翰·麦道克司

编者按：

去年，英国"自然"杂志"新闻与评介"专栏登载约翰·麦道克司（John Maddox）文章，对我国学者陈难先教授应用数论中莫比乌斯定理证明物理上的反演问题，作了高度评价。现请中科院化冶所赫彤同志译述如下，以飨读者。

谁说数论是纯粹学术性的而与实用无关？古老的莫比乌斯定理出乎意外地被证明可用来解决物理上的反演问题，它们都有重要的应用。

认为纯粹数学只是碰巧才有用处，是广为流传的观念，连数学家自己亦不例外。但科学的实际发展为什么愈来愈数学化了呢？存在着两种解释。第一是碰运气，数学家做了那么多的事，总会有用的。第二是心理上的，纯粹数学家对现实世界中的紧迫问题总会有不自觉的感受或一种直觉，这会影响他们的兴趣和方向。

当然，还存在着一种所谓希尔伯特现象。David Hilbert 原来是搞纯粹数学的，他的第一项闻名于世的工作是证明流传两千年之久的欧几里德公理结构内部并非自洽。后来，他把精力完全用在解决物理问题，并奠定了现在由牛津大学的 Atiyah 和莫斯科大学的 L. D. Fadeev 等人继承下来的传统。

但亦有人认为全部数学都有潜在的应用，而数学家把很多在技术上有用的珍宝都散乱地埋在文献堆里了，它们的用处是要有人去发现的。十九世纪发现的连分数就是后来才用到场论中去的，哈密顿（Hamilton）的四元数起先亦只是作为矢量代数的工具，直到近代才与相对论量子力学中的旋量代数发生了有趣的联系。

本文总的意图是要庆贺最近使莫比乌斯在数论方面的一条深奥定理得到应用这件事。拓朴学上的纽结或莫比乌斯带是众所周知的。莫比乌斯的其它工作中有一条关于函数间的反演关系的，下面简单介绍一下。

若有两个宗量为整数的函数 $f(n)$ 与 $F(n)$ 间存在着关系 $F(n)=\sum f(d)$，求和是对 n 的因子包括 n 与 1 在内来进行的。根据莫比乌斯反演定理，可用 $F(n)$ 将 $f(n)$ 展开成 $f(n)=\sum\mu(d)F(n/d)$，求和方式同前，即 d 经历包括 n 和 1 在内的所有 n 的因子。这里的展开系数 $\mu(n)$ 称为莫比乌斯函数，它的取值总在 0 与 ±1 之间。若 n 含有重复因子，则 $\mu(n)=0$；若 n 可表示成 r 个不同素数的乘积，则 $\mu(n)=(-1)^r$；特别是 $r=0$ 对应着 $\mu(1)=1$。为了验证这条定理，读者在出差的途中花上个把小时就能完成。在同样的求和方式下，要证明 $\sum\mu(d)$ 只在 $n=1$ 时才不等于零，那就要多点智慧才行。可以先把 n 表示成 r 个不同素数的乘积，然后证明这个和就等于 $(1-1)^r$。

这条定理有什么用处？关键在反演这个词上。物理问题多半都是反演问题。例如从地震信号中分析出地壳运动的速度分布；从光的偏振面旋转（法拉弟旋转）推断各类电子轨道的线性组合状况。今天，北京科技大学的陈难先通过几个相当有创造性的例子把莫比乌斯反演定理用来解决实际问题（Phys. Rev. Lett. **64**, 1193; 1990）。陈氏文章的要旨是表明莫比乌斯反演公式中的整数自变量可以换成连续变量，并证明了相应无穷级数的收敛性。换言之，证明若 $A(x)=\sum B(x/n)$，则 $B(x)=\sum\mu(n)A(x/n)$，此中求和从 $n=1$ 到无穷。

陈氏通过一系列用其它方法都难以解决的实例来证明他的观点。其中一个是关于从一维无限原子链中任一原子经受的总势场

$$V(x)=\sum v(nx)$$

推导出任何两个原子间的相互作用势

$$v(x)=\sum\mu(n)V(nx).$$

这是个新结果，方法极其巧妙，这至少亦说明了数论方法的潜在威力。

更有意思的例子是关于等容比热的测量导出固体晶格振动的频率分布，去掉普朗克常数和玻尔兹曼常数之后，比热可表示成 $\nu^2g(\nu)$ 与普朗克-玻尔兹曼因子的乘积从零到无穷的积分。此中的普朗克-玻尔兹曼因子反映着温度的增加可激发更多的高频声子。在低温下，一般可将比热展成温度的幂级数，第一项是三次方幂。

陈氏的做法就象魔术师似的，他把频率分布与可测量的比热的幂级数展开系数一下子就联系起来了。回过来看，数论真是以所有的技巧为基础的，既然处处都出现宗量为偶数的 Riemann 的 ζ 函数，自然就可变成伯努利（Bernoulli）数了。陈氏的另一例子是从复合黑体的辐射能流的测量推导出它的表面温度分布。据称，这在当前的遥感研究中是很有意义的。

按照陈氏的观点，下一步一定会有人要利用这新开发的莫比乌斯磨坊来解决一些过去不曾解决的问题。有趣的是让我们来关注，哪个问题将排在第一个。一个更迫切的问题是要把这方法推广到高维的情况。表面上看这似乎只是个形式，其实只要抓紧干一下就可以进入到不同维数的空间中本质上相关的各种问题。这当然不是说陈的文章展开得不够，这是一项挑战。我们自然会猜想，现在已有一支小队伍正在对数论

（下转第 13 页）

6 月 3 日等耀斑都是很有名的，常作为典型研究的 γ 射线耀斑被引用.

从 1980 年 6 月 7 日 γ 射线耀斑（图 3）以及其它耀斑同射电和硬 X 射线的时间轮廓的对比，发现 γ 射线的脉冲峰与射电和硬 X 射线的峰对应得很好，但略为延迟，这说明非相对论性和相对论性粒子是在耀斑脉冲相的 1 秒之内被加速的. 4 月 27 日 γ 射线耀斑出现许多条 γ 射线谱线也是比较引人注意的. 1980 年 6 月 21 日和 1982 年 6 月 3 日耀斑，不仅被“SMM”记录到 γ 射线，而且还检测到中子. 更重要的是瑞士

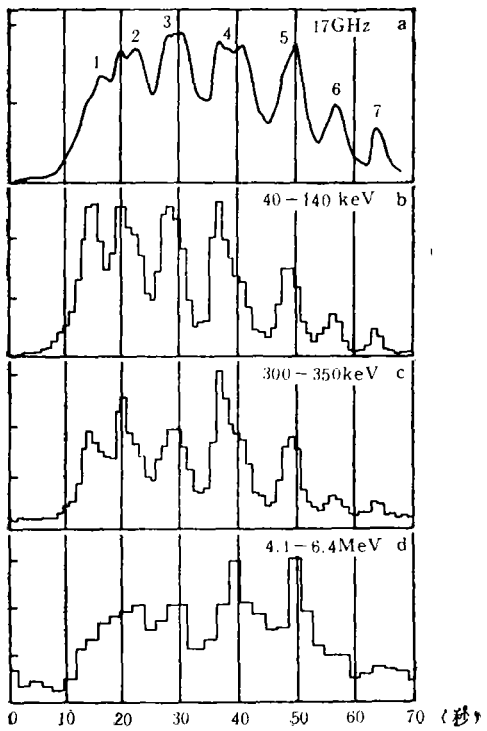

图 3 著名的 1980 年 6 月 7 日 γ—射线耀斑横轴是世界时 03 时 12 分 00 秒起算的秒数

a. 射电微波 *b*. *c*. 硬 X 射线 *d*. γ—射线

γ—射线的脉冲峰略为落后于射电和硬 X 射线

弗劳希约地面中子监测站还记录到 6 月 3 日耀斑的中子(图 4). 地球上能检测到耀斑中子说明中子的能量非常高. 因为中子的半衰期是 11 分钟，光线从太阳到地球需 8 分钟，所以到达地球的耀斑中子必须具有8/9的光速，这意味着太阳耀斑能把中子加速到 GeV 级.

太阳耀斑粒子加速和核反应的知识在第 21 个太阳活动周中获得飞速增长. 但需深入研究的关键性问题和细节还不少.要透彻理解耀斑，至关重要的是要获得高空间分辨和高时间分辨，多波段耀斑细节. 现行的第 22 周的耀斑观测除开动全球各种地面太阳仪器之外，还将利用美国的 γ 射线天文台“GRO”，日本的

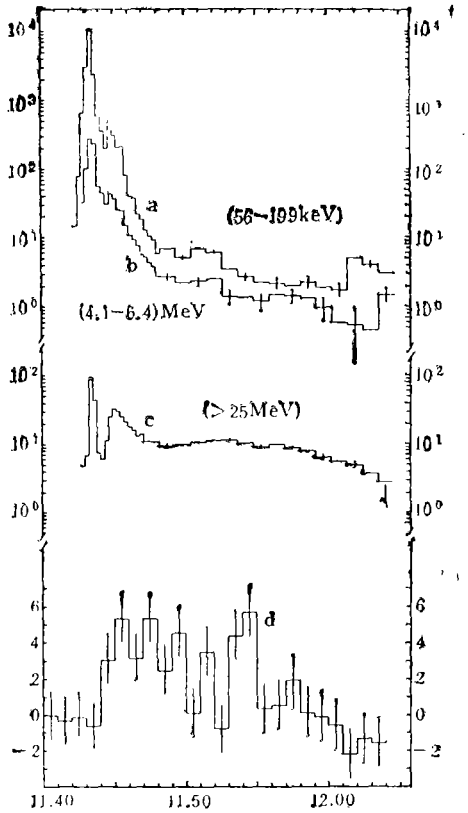

图 4 著名的 1982 年 6 月 3 日伴有地面中子记录的 γ—射线耀斑

a. 硬 X 射线 *b*. *c*. γ—射线， *d*. 地面中子监测. 横轴为世界时.

“太阳—*A*”，欧洲的尤里西斯等卫星运载的硬 X 射线仪器，以及美国的汽球载 γ 射线设备（GRID），进行国际性的高能耀斑物理研究. 1990 年是黑子数峰值年，而高能耀斑大部分出现在峰值年之后，预期今后几年将会捕获相当多的太阳高能耀斑爆发. 90 年代将是太阳耀斑研究的黄金时期.

（上接第24页）

文献进行仔细搜索，想从“废纸”堆中找到有用的工具.

资料并不缺少. 陈氏引用的是 G. H. Hardy 与 F. E. Wright 的经典的数论著作（1979 年第 5 版）. 这本书确实讲到了莫比乌斯反演的各个方面，但并未对可能会有物理应用有任何提示. 书中还有一个非常巧妙的关于拉曼诺佳（Ramanujan）和 $\sum e^{2\pi ihm/n}$ 与 $\sum\mu(n/d)d$ 相等的证明. 第一个求和是对 h 进行的，它只能取 n 的余数并不能与 n 有公因子；第二个求和是对 d 进行的，d 必须是 m 和 n 的公因子. 人们肯定会问，这么巧妙的关系到底有什么内涵与价值.

（赫彤 译）