·物理前沿· 学部委员钱临照教授主持

从单摆到混沌

赵凯华

（续前）

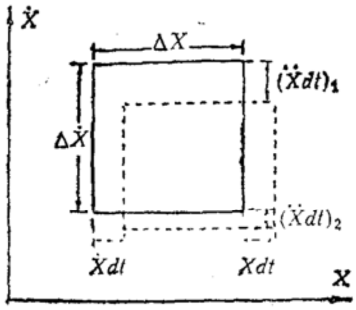

图 24 耗散系统相空间的收缩

它们分别为：

$$(\ddot{x})_{1,2} = F(x, \dot{x} \pm \Delta\dot{x}/2)/m.$$

两者之差是间距 $\Delta\dot{x}$ 的时间变化率：

$$\frac{d\Delta\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}\left[F(x,\dot{x}+\Delta\dot{x}/2) - F(x,\dot{x}-\Delta\dot{x}/2)\right]$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\Delta\dot{x}, \qquad (20)$$

从而相元面积的时间变化率为

$$\frac{d\Delta\tau}{dt} = \Delta x\frac{d\Delta\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}}\Delta x\Delta\dot{x}$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}}\Delta\tau. \qquad (21)$$

对于线性摩擦力 $F = -\gamma\dot{x}$，$\partial F/\partial\dot{x} = -\gamma$．于是

$$\frac{d\Delta\tau}{dt} = -\gamma\Delta\tau, \qquad (22)$$

即相元面积按指数律缩减：

$$\Delta\tau = \Delta\tau(t=0)e^{-\gamma t}, \qquad (23)$$

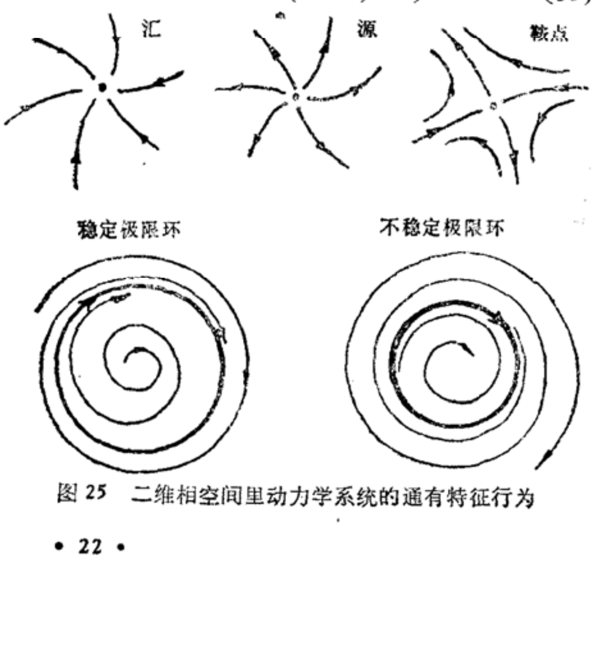

图 25 二维相空间里动力学系统的通有特征行为

与速度无关的力，如保守力、驱动力、都不影响相元面积．

以上结论对维数更高的相空间完全适用．

(2) 二维相图的通有特征行为

庞加莱和瑞典数学家本迪克森 (I. Bendixson) 证明了，在二维相空间里动力学系统的特征行为只有图 25 中所示的集几种情况：源、汇和鞍点三种不动点，稳定和不稳定的两种极限环．它们的例子我们都已在 § 2 和 § 3 中遇到过了．应说明的是，并非没有其它行为，如图 26a 所示的三条分界线交于同一鞍点的情况即是．但这种结构是不稳定的，参数稍有变化它就会分解为三个通常两条分界线相交的鞍点(见图 26b)．所以我们在标题上加了“通有”二字，英文是 generic，意思是说，只考虑那些拓朴结构稳定的特征行为，因为无论计算还是测量，总有一定误差，结构不稳定的特征行为在物理上是不能实现的．

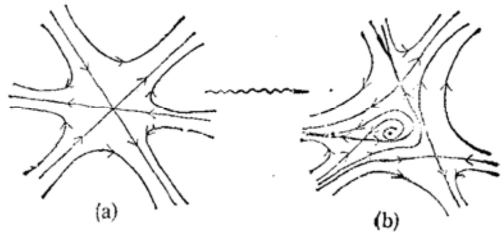

图 26 结构不稳定鞍点

在上述五种通有的特征行为中，除了稳定的不动点(汇)外只有稳定的极限环才能成为吸引子．这是可以理解的，因为如图 27 所示，若所有轨线都是从外向内穿过相平面某个区域 D 的表面，在 D 内又无不动点的话，所有相点不能既停止不动，它们的轨线又不能相交，在二维的空间里唯一的可能是大家渐进地趋于一个极限环．严格的论证，这也是一条数学定理．

(3) 奇怪吸引子

如何把上述庞加莱和本迪克森关于二维相图的结论推广到三维？直截了当地推论，我们会说，三维相图有七种特征行为：四种不动点和三种极限环，即除了源和汇外，鞍点分成两种，极限环分成三种．因为在三维空间里一个点的周围有三个特征方向，三个方向都稳定的点是汇，都不稳定的点是源，两个稳定一个不稳定和一个稳定两个不稳定的都是鞍点．即两种鞍点：在一根曲线周围有两个特征方向，除都稳定和都不稳定的极限环以外，还有一种一个方向稳定另一方向不稳定的鞍型极限环，即三种极限环．这里能够作为吸引子的，也只有稳定的不动点和稳定的极限环两种．除

此之外没有其它类型的吸引子了吗？起初人们以为就是如此。数学家长久以来企图证明这一点，但总是证不出来。

这里所说的数学家，主要是指美国的拓朴学家斯梅尔（S. Smale）。他终于悟出来了，要证的命题不对，于是他开始找反例。主要先要弄清基本概念，倒不一定是个实在的动力学系统。1967年他找到一种映

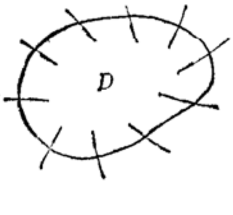

图 27　庞加莱-本迪克森定理


图 28　构造斯梅尔线圈的步骤

射，时间取离散的整数值1,2,3,…，每次把一个实心的三维圆环按照下面描述的规则映射到它的体内。取圆环的周长为一个单位，从而其上每个点的位置，都可由一个任选的原点算起用从0到1的数来表征，这是一个整数部分为0的小数。沿圆周的映射规则是，某个时刻在位置 x 的相点下一个时刻变到位置 $2x$。从几何上看，相当于把圆环的长度拉伸一倍，然后再盘绕在原来的环内，如图28所示。显然，变换前后的拓朴结构如此的不同，这种映射对微小的参量变化是绝对稳定的。在圆环被拉长的同时，其截面被拉细。两块新的截面以某种方式嵌在原来的截面里。如图29所示，使其总体积比原来细。这种映射一次次无限地进行下去，圆环最后变成一盘无限多匝无穷细的线圈，其体积趋于0。从横截面上看，是一种无穷次自相似压缩映射。下面我们将看到，这样得到的是一种叫做康托尔集合的分形结构，这问题暂且不说，留到§5中再介绍。现在先看纵向变换令人惊异的奇怪特点。

如果我们用二进位来写0到1之间的小数，则斯梅尔的变换 $x \to 2x \pmod 1$ 相当于把小数点移后一位，然后把整数位变作0；或者说把小数点后的第一位抹掉，把后面所有各位数字进上来。例如，

$t=0$,　$x_0 = 0.1000100110101110010100101$

$t=1$,　$x_1 = 0.000100110101110010100101$

$t=2$,　$x_2 = 0.00100110101110010100101$

$t=3$,　$x_3 = 0.0100110101110010100101$

$t=4$,　$x_4 = 0.100110101110010100101$

$t=5$,　$x_5 = 0.00110101110010100101$

……………………………………

如此下去，对于所有有限长的小数，最后的归宿都是0（不动点）；如果这小数是循环的（有理数），其最后的归宿是周期解（极限环）。对于真正的无理数，这变换将永无止境地持续下去，而且从不重复。但是任何计算

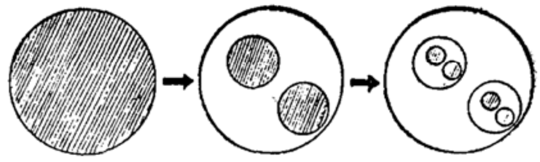
图 29　自相似压缩映射

都是有限精度的，无理数只能用有效位长的小数来逼近。不管你用多少位小数，譬如十万位，则在第十万零一次映射以后，它将滞留在不动点0上，与真正无理数的命运分道扬镳了。这里令人吃惊的有下列几点：1. 无论两点靠得多近，即坐标的前多少位小数重合，它们的长期行为终究会变得完全不同。此即所谓初值敏感性。2. 尽管上述变换的规则完全是决定论的，在一个线段中绝大多数的点是无理数，它们的变换却是貌似随机的。3. 无论多么近的两个有理数之间都有无理数，无论多么近的两个无理数之间都有有理数，二者的终态完全不同，因而没有一个点的运动形式是稳定的。

虽然实在的动力学系统中时间是连续变化的，上述离散映射也不见得那么不真实。我们可以把它看做是在四维相空间里的一个三维截面上的庞加莱映射。

1970年一位在巴黎工作的比利时数学家茹厄勒（D. Ruelle）和一位荷兰的访问学者塔肯斯（F. Takens）受到斯梅尔的拓朴动力学观点的启发，开始思考湍流问题。他们怀疑四十年代霍普夫（Hopf）-朗道（Landau）的理论（参见下面§7）不太对。当流体向湍流过渡时，很可能出现斯梅尔"线圈（solenoid）"一类的吸引子，并给这类吸引子取了个名字，叫"奇怪吸引子（strange attractor）"。

也许会有抱怀疑态度的人与数学家们争辩，说你们杜撰出来的映射实在太矫揉造作了，它们表现出来的一切奇怪特性都是人为制造出来的，实在的动力学

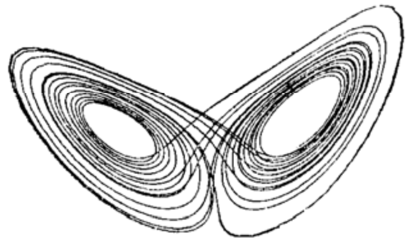
图 30　洛伦茨吸引子（在 xy 面上的投影）

系统根本不会那样。这意见对吗？否！殊不知在数学家们潜心研究奇怪吸引子之前好多年前，MIT 的气象学家洛伦茨（E. Lorenz）已经发现了一个奇怪的吸引子，于1963年发表在《大气科学杂志（J. Atmos. Sci.）》上。世界上每年出版着数千种科学杂志，科学家们能跟踪上本门学科的期刊就不错了，拓朴学家怎么会钻到气象杂志里去阅读这篇处于萌芽状态的创新

作品呢？此外，那个时代的气象学家最多也只谙悉传统的数学．就这样，洛伦茨的论文默默地躺了十几年，虽然他自己已意识到这里包含着某种大事情．现在看看洛伦茨做了些什么．

众所周知，大气对流对天气的影响是十分重要的，这方面的理论研究已有较长的历史．然而描述对流的方程，即使经过大大删减，仍旧太复杂．洛伦茨大胆地砍掉其余变量，只保留三个关键的，用 x, y, z 表示，得到下列方程组：

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= -10x + 10y, \\ dy/dt &= 28x - y - xz, \\ dz/dt &= \frac{8}{3}z + xy. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

现今这方程已成为混沌理论的经典方程，叫做洛伦茨方程． 其中参数 28 的选择刚好在非定常对流要开始的地方．解这种非线性方程除数值计算外几乎别无它法，洛伦茨当时有一个 Royal McBee LGP-300 型的真空管计算机，其速度大约每秒作一次迭代，与现代的计算机速度相比简直不可同日而语了．洛伦茨得到的吸引子是三维的，图 30 给出它在 xy 面上的投影．总体它由两个环套组成，看上去像一对腰子．其实每一环套都有靠得很近的无穷多层，每层上都细密地排列着无穷多个回线．代表系统的相点在这边转几圈后又到那边转几圈，完全无法预料它什么时候该从一边过渡到另一边．洛伦茨的吸引子就是后来数学家们所说的奇怪吸引子．

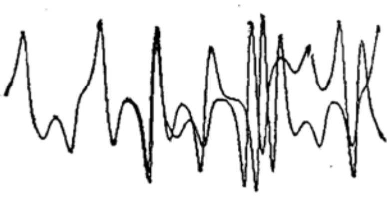
图 31　洛伦茨发现的蝴蝶效应

洛伦茨大约是在 1960 年有了这台计算机的．1961 年冬他正在计算现已出名了的这个系统的前身．一日已算得了一个解，他想知道此解的长期行为，为了避免等上几个小时，他不再从头算起，而是把纪录下来的中间数据当作初始值输入．他本指望计算机重复给出上次计算的后半段结果，然后接下去算新的．却未料到，经过一段重复过程后，计算就逐渐偏离了上次的结果（见图 31）．是计算机出了毛病吗？洛伦茨很快就意识到问题出在他输入的数据上．计算机的存储是六位小数：0.506127，而打印出来只有三位：0.506．他第二次输入时用了后者，以为千分之几的误差无关紧要．按传统的思维方式考虑，也确实该这样．洛伦茨意识到，他的方程式并不具有传统数学想象的那种行为，而是高度初值敏感的．他为这种现象取了一个名字，叫做“蝴蝶效应”，意思是说，一只蝴蝶今天拍打一下翅膀，使大气的状态产生微小的改变；但过一段时间，譬如一个月，本来会横扫印度尼西亚海岸的一场龙卷风避免了，或者本来不该有的却发生了．天下有那么多蝴蝶，谁知道它们的效应会不会抵消！洛伦茨的结论是，长期的天气预报是不可能的．多长才算长期？他当时的回答是几天到几十天．现在看来，几十天是不可能的，可预报期大概只有几天．

（4）什么是“混沌（chaos）”？

到现在我们还没有给我们的主题“混沌”下定义，它的概念确是比较模糊的．正像给“生命”下定义一样，这定义很难确切地下出来．一百多年前玻耳兹曼把混沌当作科学术语来使用（分子混沌拟设），三四十年代维纳（N. Wiener）把混沌一词使用到他的论文题目上，其含义都指的是随机过程引起的无序状态．现代把它用来特指决定论系统中的内在随机行为，大概是从李（Li）和约克（Yorke）二人 1975 年的一篇论文标题“周期 3 意味着混沌”开始的．作为混沌的操作定义，我们列举如下几点．当一系统产生貌似无规的运动时，如果 ① 作为系统基础的动力学是决定论的；② 未引进外加噪声；③ 个别结果敏感地依赖初始条件，从而其长期行为具有不可预测性；④ 系统长期行为的某些全局特征却与初始条件无关；

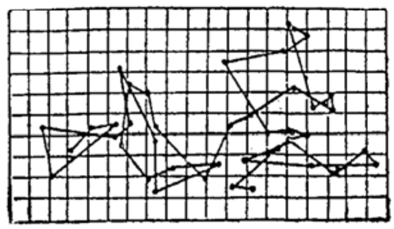
图 32　布朗运动

我们很可能是在和混沌打交道．

从已有的单摆和洛伦茨的例子看，上面的前三点无需更多的解释．在耗散系统中标志着混沌的全局特征是奇怪吸引子，作为整体它是与初始条件无关的．这一点与真正随机系统中的不可预测性完全不同．奇怪吸引子又叫混沌吸引子（chaotic attractor）．

§5. 混沌吸引子的刻划

下面我们将讨论混沌吸引子的刻划问题．刻划混沌吸引子的主要手段是分形维数和李雅普诺夫指数．

（1）分形维数

数学家虽然曾经构想出一些稀奇古怪的东西，如充满一块平面的皮亚诺曲线，处处连续处处不可微的维尔斯特拉斯函数，等等，但他们并不相信自然界里真的存在这种病态的怪物．传统的物理学家则习惯于和光滑或规则的形体打交道．伽利略就说过，自然界的语言是数学，而其书写的符号则是三角形、圆和其它几何形状．于是，像泥土、岩石这样一类不规则、不干净、

（下转第 40 页）