从单摆到混沌

赵凯华

(续前) 图7是一张扩展的相图,对应于不同的 n。$\theta = 2n\pi$ 对应图上不同的点。它们被看成是不同的吸引中心。从图7可以看出,分界线把相平面分隔成不同的区域,从每一区域中的任一点出发,轨线都流向该区中心的吸引子。我们把这样的区域叫做该吸引子的吸引域 (basin of attraction)。在图7中相邻的吸引域用有无阴影区分开来。

(3) 有阻尼有驱动力的情形

无阻尼的保守系统只是真实物理系统的一种抽象,实际系统总是多少有一点阻尼的。然而,从上面的讨论中我们看到,只要有任意小的阻尼,就会把保守系统相图5a的拓扑结构(如闭合轨线、异宿轨线)完全破坏了。所以保守系统都是(拓扑)结构不稳定的,或者叫做非粗壮的。

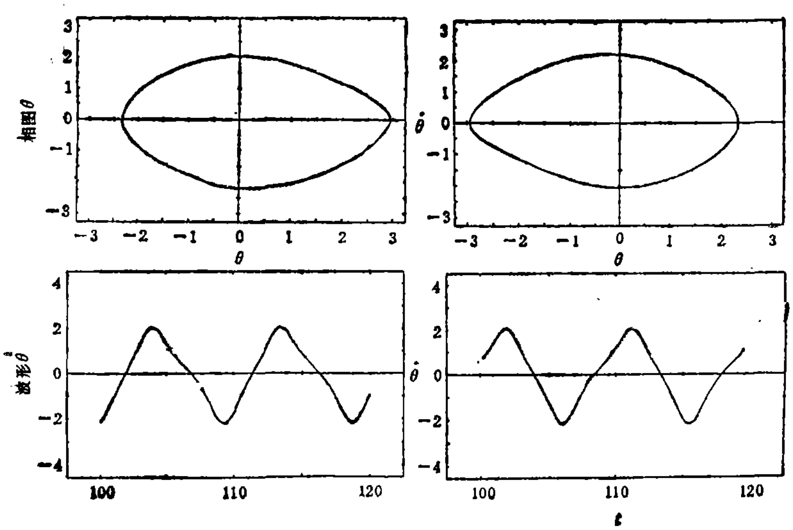
自治系统的相轨道不会相交,因为力不依赖于时间,从任何初始运动状态出发系统的演化都是完全确定的,即通过每一相点的轨线是唯一的。无周期性驱动力时,单摆是一个一维的自治系统,其相空间是二维的。加了周期性驱动力,它成了一维的非自治系统,相空间虽仍是二维的,但相轨道可以相交。若像(4)式中那样增加一个变量 ϕ,把相空间扩展到三维,相轨道就不相交了。如果又把三维投影到二维,相轨道仍旧是相交的。为了便于显示,我们还是使用二维的表示法。

在任意大振幅下受驱动阻尼摆的运动十分复杂。首先,用解析方法去解这个问题是不可能的。只能在给定参量和初始值后作数值计算:其次,从无量纲的运动方程(3)来看。有三个独立参量:阻尼 β、驱动力的幅值 f 和频率 Ω 详尽无遗地穷举,并计算出具有各种参量组合的情况,也几乎是不可能的。再者,即使用计算机把个别相轨道算出来,它往往在二维的相平面上自相交叠缠绕,使人一下子看不出个所以然来。如果在计算机屏幕上监视相轨道的发展。可以发现。起初它有一段暂态过程,最后它将收缩到一个简单得多的终态集上。今后我们将把注意力集中在终态集上。为了使读者得到感性认识,下面先给出一批计算结果,取参量值 $\beta = 1/4, \Omega = 2/3$。$f$ 则由小到大取一系列数值。

先看图8。这里 $f = 1.025$ (f 是以摆锤重量 mg 为单位的)。图的上部是相图。下部是速度 $\dot\theta$ 的波形图。除了波形发生畸变、且左右变得不对称外,最大的新特点是出现了两个终态,各自分享着的相平面上一定的初态。显然,两个终态都对应周而复始的周期解。

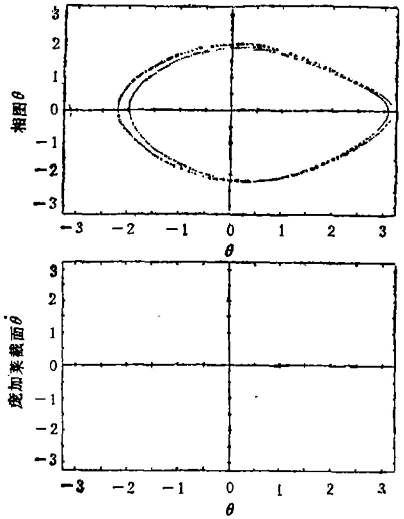
现在来看图9-14,先只看每张图的上半相图部分。在图9中 f 增至1.07,其新特征是出现了二倍的周期,即在驱动力的两个周期内运动才恢复原状,如此周而复始地运动下去。图10中 f 增至1.15,情况就更复杂了,相点貌似无规地游荡着,永不重复自己走过的路.说它"貌似"无规,是因为相点并不以连续的概率分布在相平面上随机地行走,它留下的足迹显然是有某种内在结构的。图11和12分别对应 f 增至1.35和1.45的情况,运动恢复了较简单的形式:一倍和二倍的周期解。与图8和9不同的是,其运动不是往复摆动,而是单向的旋转。当 f 增大到1.47时(图13),出现了四倍周期的旋转运动。f 大到1.50时(图14),又出现貌似无规的运动。

我们曾说,相图方法可把



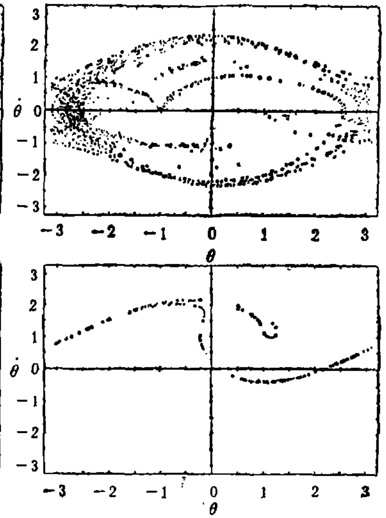
$\beta = 1/4, \Omega = 2/3, f = 1.025$

图8 单摆相图与波形的对称破缺



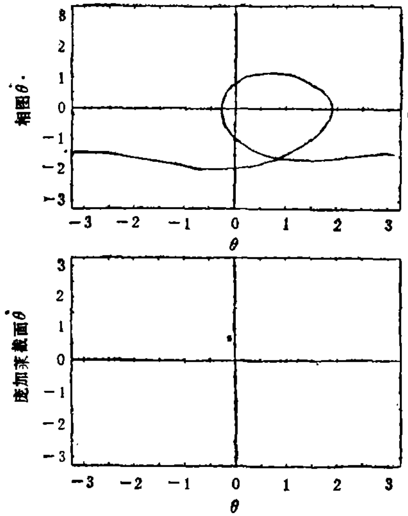
$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.07$

图 9　单摆的相图与庞加莱截面



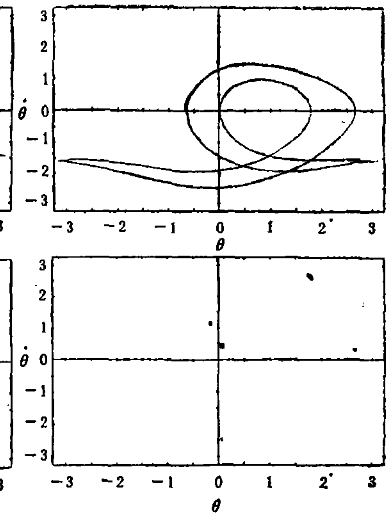
$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.15$ .15

图 10　单摆的相图与庞加莱截面



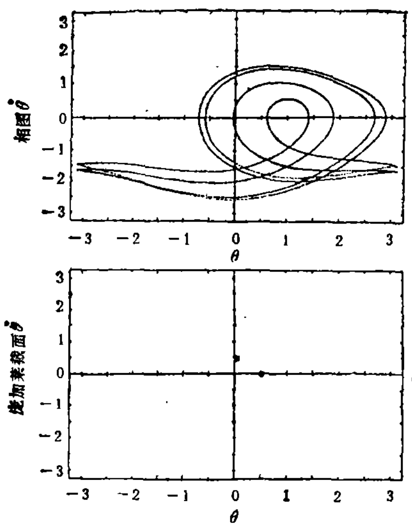
$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.35$

图 11　单摆的相图与庞加莱截面



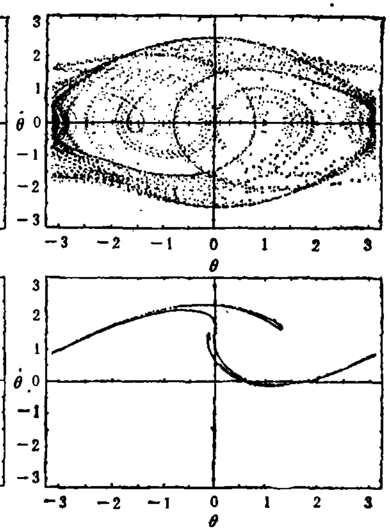
$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.45$

图 12　单摆的相图与庞加莱截面



$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.47$

图 13　单摆的相图与庞加莱截面



$\beta=1/4, \Omega=2/3, f=1.50$

图 14　单摆的相图与庞加莱截面

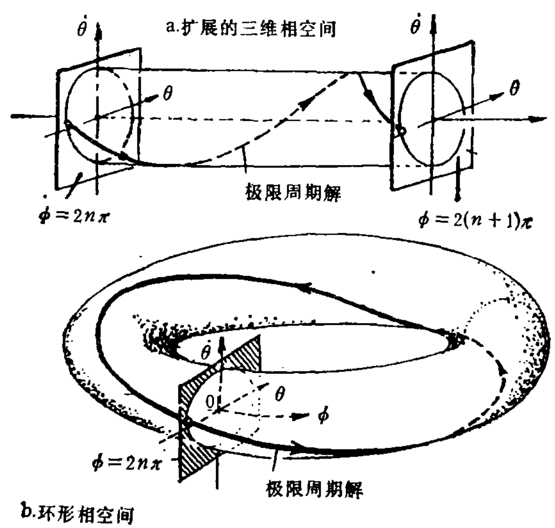


图 15　庞加莱截面法

复杂运动的描绘简化．我们看到，它简化得还不够、特别是遇到图 10 和 14 那种情况、因为有些倍周期运动的倍数是很高的，其轨线看起来也可能很乱，一时较难与非周期的运动区分开来．庞加莱还发明了另一种更简化的描绘方法，叫做庞加莱截面法，用此法可较容易地判断解是否周期的．

让我们暂时按(4)式增加一个变量 φ，把相空间扩大到三维．在 φ 方向每隔一个周期 2π 取一个截面，如图 15a 所示，也可以像图 15b 那样把相空间弯成一个圆环，观察轨线穿过环上唯一截面的情况．这好像用与驱动力同频的闪频仪来拍照，把一个连续的运动化为在时间上离散的图象来处理．轨线下一次穿过截面的点可看作是前次穿过点的一种映射．这截面称为庞加莱截面，这映射称为庞加莱映射，若运动是简单周期的，则相轨道每次都从同一处穿过庞加莱截面，即在庞加莱截面上只有一个不动点(见图 15b)．如果运动是二倍周期的，则在庞加莱截面上有两个不动点，四倍周期的有四个不动点等等．如果运动无周期性，在庞加莱截面上将有无穷多个点．图 9-14 的下半部是与上半相应的庞加莱截面，用它们来判断运动是否周期的，以及几倍周期，可一目了然，(为了能把庞加莱截面上的孤立点看清楚，图中把它们夸大成矩形小斑．)

§3. 自激振荡与极限环

自激振荡与受迫振荡不同．它是在非周期驱动力的作用下所作具有确定振幅和频率的持久振荡．在数学上相当于一个孤立的闭轨道，或孤立的周期解，即极限环，这只有在非保守的、非线性的变阻尼系统中才可能发生．保守系统中也有周期解．但不是孤立的，而且是结构不稳定的．受迫振动系统是非自治系统，而自激系统是自治系统．一维的自治系统，我们可以在二维的相平面上研究它．

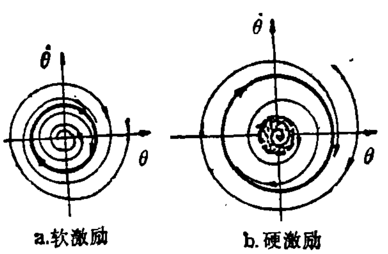


图 16 自激振荡的相图

自激振荡有软硬两种激励方式，它们相图的结构分别由图 16a, b 所示．在软激励的情况里有一个稳定的极限环，它外边的轨线向内卷缩，里边的轨线向外扩展，从两侧渐进地逼近它．此时极限环内有个不稳定的不动点，或者叫源点 (source)，其周围轨线是向外发散的．在硬激励的情况有两个极限环，外边一个是稳定的，里边一个是不稳定的，所谓不稳定的极限环，其外边的轨线向外扩展，里边的轨线向内卷缩，从两侧背离它．此时内极限环内里边有个稳定的不动点，或者叫汇点 (sink)，其周围轨线是向里汇集的．下面我们对于两种自激振荡各看一个例子．

(1) 干摩擦引起的自激振荡

摩擦引起振荡的现象极为普遍，各种弦乐器(如小提琴、二胡等)发音的机理都属此类．现在我们看图 17 所示较简单的模型．传送带以恒定速度 v_0 前进，系在另一端固定的弹簧上的物体受传送带摩擦力 f 的带动而向前移，与此同时弹簧被拉伸，以更大的力向后拉那物体，当此力超过了最大静摩擦时，该物体突然向后滑动，于是弹簧缩短，向后拉物体的力减小，直到传送带又能将它带动向前为止．如此周而复始，形成振荡．在这种振荡过程中弹簧是逐渐伸张、突然松弛的，其波形如图 18 所示．这种振动属于张弛型 (relaxation) 振动．以上便是干摩擦引起自激振荡大致的物理图象，下面作些较细致的分析

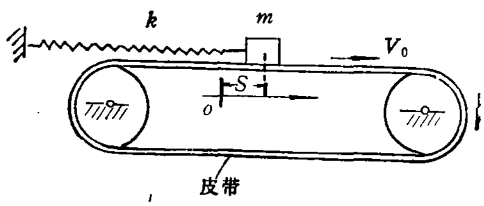


图 17 干摩擦引起自激振动的模型

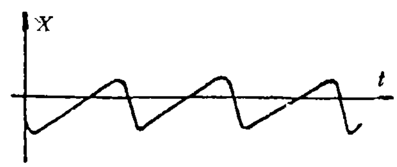


图 18 张弛振动

摩擦力 f 是相对速度的函数，其形式如图 19 所示，是非线性的．该物体的运动方程为

$$m\ddot{s} + \gamma\dot{s} + ks = f(\dot{s} - v_0), \qquad (14)$$

其平衡位置($\dot{s} = 0$) 为 $s_0 = f(-v_0)/k$，这时弹簧的拉力与摩擦力抵消．令 $x = s - s_0$，上式化为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = f(\dot{x} - v_0) - f(-v_0), \qquad (15)$$

平衡点 $\dot{x} = 0$ 附近上式右端可写为 $f'(-v_0)\dot{x}$，移项后得

$$m\ddot{x} + [\gamma\dot{x} - f'(-v_0)\dot{x}] + kx = 0, \qquad (16)$$

当 $f'(-v_0) > \gamma$ 时，阻尼是负的，即平衡失稳．这一点可从摩擦力作功的角度来分析．如图 19 所示，$f'(-v_0) > 0$ 意味着，摩擦力 f 在作正功的区域 ($\dot{x} > 0$) 里比在作负功的区域 ($\dot{x} < 0$) 里大，从而该物体在一个周期里平均说来是获能的．如果所获能量大于阻尼所引起的耗散，平衡就会失稳．但是这种情况只能维持到该物体的速度 $\dot{x}$ 不超过 v_0，一超过此限，摩擦力就反向了，阻止该物体的能量进一步积累．综上所述，这个系统的相图应属图 16a 所示的软激励类型，在失稳的不动

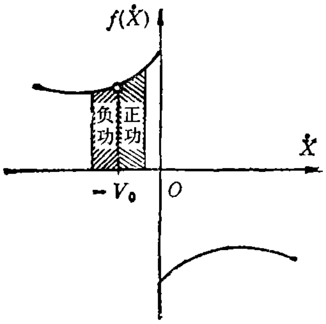


图 19　传送带的摩擦曲线与摩擦力的功

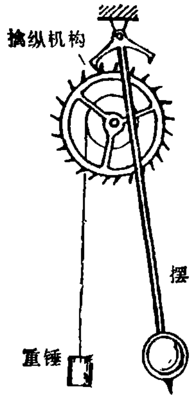


图 21　祖父的挂钟

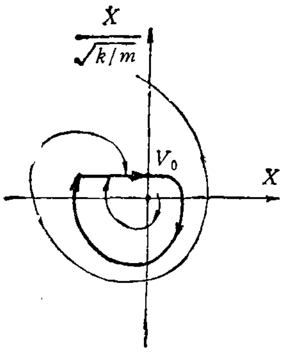


图 20　干摩擦引起振动的极限环

点外有一个稳定的极限环。要在相图上画出这个极限环，只能靠数值计算(图 20)。极限环的上部平坦部分对应于波形图 18 中沿斜线上升部分，它反映物体随着传送带一起走($\dot{x} = v_0$)的伸张过程；极限环下部的曲线回程对应于波形图中的陡峭下跌部分，这相当于物体摆脱摩擦力的控制后而回弹的松弛过程。极限环的形状和大小完全由系统的参量决定，它唯一地确定了振荡的幅度和周期，即自激振荡的振幅和频率是由其自身的性质决定的。

(2) 祖父的挂钟 (grandfather's clock)

钟表机构是典型的自激振动系统。老式挂钟是以重锤的势能为能源的(见图 21)，摆的上端装有擒纵机构，在每个周期的特定相位上能量通过它输入给钟摆。除擒纵轮推动的一刹那，摆的运动方程可采用(13)式，作两点变更：1.用小角度近似，$\sin\theta \simeq \theta$。2.假设干摩擦与速度的大小无关，只与它的方向有关，因而将式中的 $\dot{\theta}$ 换成 $\sin(\dot{\theta})$。这样，我们就可通过变量代换 $\theta/2\beta \rightarrow \theta$ 将该式进一步简化为

$$\ddot{\theta} \pm 1 + \theta = 0, \qquad (17)$$

式中 $\dot{\theta} > 0$ 时取＋号，$\dot{\theta} < 0$ 时取－号。上式又可写为

$$(\theta \pm 1)^{\cdot\cdot} + (\theta \pm 1) = 0, \qquad (18)$$

此式所给出的相轨道是以 $(\theta = \mp 1, \dot{\theta} = 0)$ 为中心的圆弧。每当 $\theta = -1, \dot{\theta} > 0$ 时系统受到擒纵轮一次冲击，能量突然增加一个数值 $\lambda(\lambda > 0)$。于是由相图 22 中 a 点出发的轨迹为 $abcde\ldots$，其中 ab 为以 $B(-1, 0)$为中心的圆弧，故 b 的坐标为 $(-1, A-1)$。在 b 处能量增加 λ，跳到 c 点。简谐振动的能量等于振幅平方之半，b 点的振幅为 $A-1$。能量为$(A-1)^2/2$，从而 c 点的能量为 $\lambda + (A-1)^2/2$，振幅(即 c 点的纵坐标)为 $\sqrt{2[\lambda + (A-1)^2/2]} = \sqrt{(A-1)^2 + 2\lambda}$。$cd$ 也是以 B 点为中心的圆弧。de 为以 $C(1, 0)$ 点为中心的半圆。设 e 点的横坐标为 $-A'$。则 $A' = 0e - 1 = Cd - 1 = 0d - 2 = Bd - 3 = Bc - 3 = \sqrt{(A-1)^2 + 2\lambda} - 3$。如果从 e 出发再绕一圈，将得类似的结果。普遍地我们有从第 n 次到第 $n+1$ 次振幅间的迭代关系：

$$A_{n+1} = \sqrt{(A_n - 1)^2 + 2\lambda} - 3, \qquad (19)$$

令 $A_{n+1} = A_n = \xi$，我们可以找到这个迭代关系的不动点 $\xi = \lambda/4 - 1$，达到此点意味着轨线进入极限环，即自激振荡状态(图 23)。由于只有当 $\xi > 1$ 时(即环的左边缘在 B 点之左)，极限环才会出现，这要求 $\lambda > 8$，即输入的能量太小了不行(图 23 中取 $\lambda = 32, \xi = 7$)。此外，当初态落在图 23 原点附近的阴影区内时，系统的振动也激发不出来。这里阴影区的边界是个不稳定的极限环。线段 BC 是个稳定的吸引子，阴影区是它的吸引域，其外是稳定极限环的吸引域。所以，这是一个硬激励的自激振荡系统，相平面上有个死区，把重锤提上去钟也不走，还得拨弄一下钟摆，使系统跳出死区，钟才开始走起来。

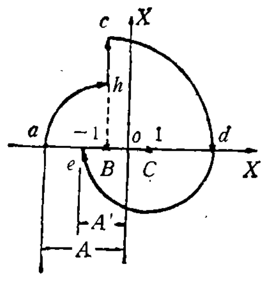


图 22　挂钟的相图

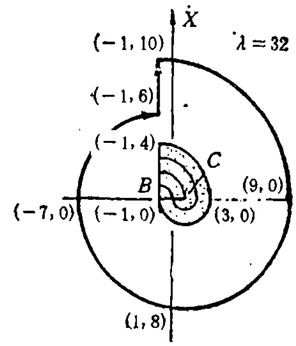


图 23　挂钟的极限环

§4. 奇怪吸引子和混沌

(1) 耗散系统相空间的收缩

我们在 §2 里看到，阻尼摆的相图中相邻的相轨道有逐渐靠拢的趋势，而无阻尼的情况则无此现象。在相平面内取一面积为 $\Delta\tau$ 的相元，随着其中相点的移动，此相元除移动和变形外，在耗散系统中其面积 $\Delta\tau$ 要缩小，最后到达平衡点时，$\Delta\tau \rightarrow 0$。周期驱动力的存在并不改变这一结论。对于自激振荡系统情况也是这样，整个吸引域收缩到极限环上，面积也趋于 0。相空间收缩的道理可用图 24 来说明。以二维情况为例，在相平面上取一边长为 Δx 和 $\Delta\dot{x}$ 的矩形。经时间间隔 dt 后它移到的新位置，在图中用虚线表示。其左右竖边横移的速度 $\dot{x}$ 不依赖于空间坐标 x，故其间距离 Δx 不变。然而，若力 F 与速度 $\dot{x}$ 有关，则上下两横边移动的速度 $\ddot{x} = F/m$ 将不同。　　**(待续)**