·物理前沿· 学部委员钱临照教授主持

从单摆到混沌

赵凯华

§1. 前言

普通物理教学，从概念、内容到方法，传统上都是以经典物理学为主体的。本世纪以来，相对论和量子力学的建立，成为近代物理学不可缺少的基础。普通物理课程的现代化，必然要涉及如何处理相对论和量子力学的问题。然而，近年来在经典物理学领域内也出现了前沿课题——混沌的理论，如何将这一内容用普通物理的风格讲出来，而又不失之于肤浅，是很多人关心的问题。我们在此做个尝试，成功与否，望识者点拨。

众所周知，经典物理学发端于伽利略和牛顿。远古时代人们对大自然的变幻无常怀着神秘莫测的恐惧。几千年的文明进步使人类逐渐认识到，大自然是有些规律可循的。经典力学在天文上的预言获得的辉煌成就，无疑给予了人们巨大的信心，以致在18世纪里把宇宙看作一架庞大时钟的机械宇宙观占了统治地位。伟大的法国数学家拉普拉斯的一段名言把这种彻底的决定论思想发展到了顶峰：

“设想有位智者在每一瞬间得知激励大自然的所有的力，以及组成它的所有物体的相互位置，如果这位智者如此博大精深，他能对这样众多的数据进行分析，把宇宙间最庞大物体和最轻微原子的运动凝聚到一个公式之中，对他来说没有什么事情是不确定的，将来就象过去一样展现在他的眼前。”

量子力学是概率论性质的，但这并不妨碍决定论的观点继续统治着宏观世界。只是在最近十几年，非线性动力学中提出了“混沌”的概念之后，才使经典物理学本身的观念受到直接的冲击。普通物理课程是浸透了传统的经典物理学精神的，似乎也应在其中对此有所反映。目前有关混沌的专著层出不穷，可是对大学一、二年级的学生来说都太深了；通俗的好书也有，如格莱克的«混沌——开创新科学»，但那是报告文学，不能作教本。此外，很多介绍混沌的文章从逻辑斯谛映射入手，这虽不算难懂，然而这不像是物理，普通物理的师生们不感到亲切。从物理教学的观点看，从单摆入手可能是最好的突破口。

伽利略观察比萨大教堂吊灯的摆动，发现单摆定律(周期与摆幅无关)的故事，一直传为佳话。惠更斯利用摆的“等时性”发明了钟表，流传至今。直到电子表风靡世界之前，摆始终是计时装置的心脏，均匀韵律的象征。所有高中和大学的物理课堂上，都少不了要讲单摆定律，没有物理实验课中不做单摆实验。我们回顾一下，传统的大学本科物理课程中是如何处理单摆(或者更广泛些，一般的振动)问题的。

与伽利略的原始想法不同，现今的课本都指出，单摆的等时性不是严格的定律，而是小振幅下的近似。至于振幅大了会怎样？由于这问题在理论上涉及较深奥的数学(全椭圆积分)，一般很少交代，那怕是定性的描述。通常在教学中，是把小振幅的单摆运动纳入“简谐振动”这个更一般的范畴中讲授的，引入一些重要的概念，如振幅、相位、频率和周期、阻尼等。在讨论受迫振动和共振问题时，则着重于振幅和相位的频率响应特征，以及能量转化的分析。在这里人们看到，受迫振子总是按驱动频率对称于平衡位置作简谐运动的，不会有更复杂的情况出现。以上内容无疑都是非常重要的，但另一方面我们不可忘记，它们都以“线性”为前题。在普通物理和大学本科的某些后继课(如无线电电路)中，也涉及一些“非线性”问题。归纳起来，主要有两点：

(1) 当正弦讯号通过非线性元件时，波形会发生畸变。用傅里叶分析的观点来说，这里产生了频率为基频整数倍的谐波。几乎在我们现行的课程设置中，任何地方都没有提到出现“分频”(即频率为原来的有理分数)的可能性，尽管这种现象早就被法拉第观察到并记录下来，并由瑞利在理论上给予说明。

(2) 当不同频率的讯号经混频器混频后，产生和频和差频讯号。对于两个频率相近的振动之间可能发生的“同步锁相”现象，则很少强调。

此外，对运动的描述方式是以运动状态(位置和速度)随时间变化的过程为主的，从不强调描绘速度和位置之间关系的相图方法。

还有，物理专业中数学训练的传统侧重于初等和高等的微积分，以及如何解常微分方程和偏微分方程，但非线性动力学的基础是微分方程的定性理论和拓朴学，这是受传统训练的物理学家很不熟悉的。混沌理论的发展向我们提出一个问题，即物理专业的数学课程是否也有适当改革的必要？作者愿借此机会提请有关同行探讨。

上述现行数学中的不足之处都是导向非线性动力学必要的“接口”，下面我们将以单摆为出发点，在传统教学内容的基础上装配上这些接口，一步一步地走向“混沌”。

§2. 单摆的运动并不简单

通常说单摆，是相对于复摆而言的。它是挂在一

根细线下面的小球，可认为整个系统的全部质量集中在可看做质点的小球上．单摆又叫数学摆，是物理学中最简单的模型之一．下面我们将看到，如果不限制摆幅，它的运动有意想不到的复杂性．为了使它能做大幅度的运动，这里把细线换成刚性细棒，仍认为其质量可忽略．如图 1，设摆长为 l，小球的质量为 m，相对于平衡的下垂位置的角位移为 θ，重力加速度为 g．则其运动方程为：

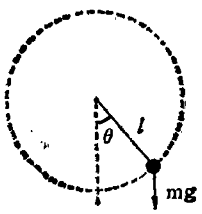


图 1 单摆

$$ml\ddot{\theta} + \gamma l\dot{\theta} + mg\sin\theta = F\cos\omega_D t, \qquad (1)$$

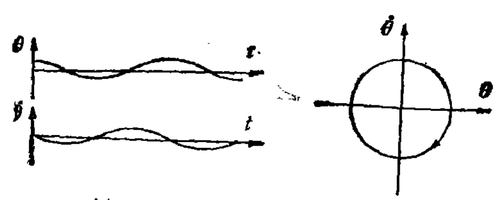
或

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{m}\dot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = \frac{F}{ml}\cos\omega_D t, \qquad (2)$$

式中 γ 为阻力系数，$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ 为固有角频率，等式右边是周期性的驱动力，其角频率为 ω_D．在动力学里人们习惯于把方程式无量纲化，上式中 θ 上的点代表对时间的微商，用 ω_0^2 去除每一项，将无量纲时间 $\omega_0 t$ 叫做 t，即得：

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \sin\theta = f\cos\Omega t, \qquad (3)$$

式中 $\beta = \gamma/2m\omega_0$ 为无量纲的阻尼因数，$f = F/ml\omega_0^2 = F/mg$ 和 $\Omega = \omega_D/\omega_0$ 都是无量纲化的驱动力参量．(3)式右端是显含 t 的，这在动力学中叫非自治系统（nonautonomous system）．通过增加自变量可以使之化为不显含 t 的自治系统（autonomous system）：



(a) 振动曲线　(b) 相图

图 2 小振幅单摆的振动曲线与相图

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega,\\ \dot{\omega} &= -2\beta\omega - \sin\theta + f\cos\phi,\\ \dot{\phi} &= \Omega.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

下面我们由简到繁一步步地增加复杂性．

（1）无阻尼（$\beta = 0$）无驱动（$f = 0$）情形

这时(3)式化为

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0. \qquad (5)$$

在小振幅（$\theta \ll 1$）的情况下，$\sin\theta \cong \theta$，上式进一步简化为

$$\ddot{\theta} + \theta = 0, \qquad (6)$$

此式的解是人们熟知的，适当地选择时间的起点，θ 和

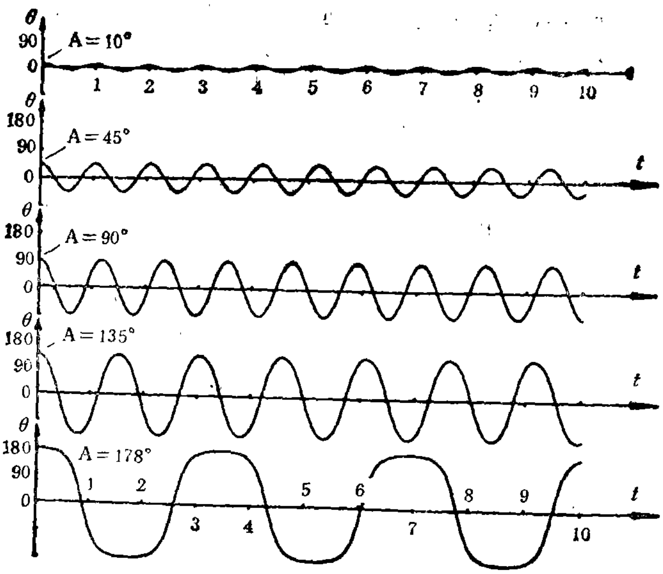


图 3 非线性摆的波形

$\dot{\theta} = \omega$ 随 t 的变化可表为：

$$\theta = A\cos t, \qquad (7)$$

$$\dot{\theta} = \omega = -A\sin t, \qquad (8)$$

即运动是简谐的(见图 2a)，周期(或者说频率)与振幅 A 无关，这正是伽利略发现摆的等时性原理(提醒读者注意，这里频率是以 ω_0 来约化的，频率等于 1 意味着它等于 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$)．我们可以从 (7)(8) 两式消去 t，得：

$$\theta^2 + \dot{\theta}^2 = A^2, \qquad (9)$$

在 $\theta - \dot{\theta}$ 图中其轨迹是个以 A 为半径的圆(见图 2b)．

对于任意大的振幅，

$\theta(t) = ?$　$\dot{\theta}(t) = ?$

周期与振幅的关系又如何？

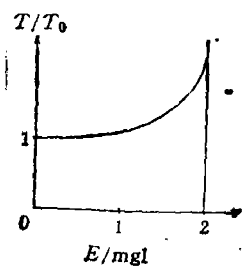
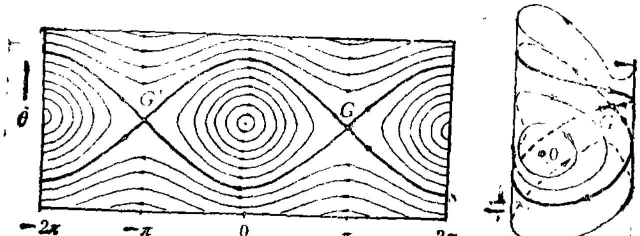


图 4 非线性摆的周期



(a) 扩展的平面相图　(b) 柱面相图

图 5 无阻尼摆的相图

这些关系式已不可能用初等函数来表达了，我们用图 3 和图 4 来回答这些问题．从图可以看出，当振幅小于 90° 时，周期的增加不大；当振幅趋于 180° 时，周

期→∞. 后一特征是可以理解的，因为 $\theta=180^\circ$ 是个不稳定的平衡点，由它从静止出发，或趋近而又不超越它，理论上都需要无穷长的时间.

"相"的意思是运动状态，即速度和位置. 图 2b 中那种 $\theta-\dot{\theta}$ 曲线叫做"相图 (phase portrait)". 现在我们来看在任意大振幅时单摆的相图. 此问题倒是可以用初等函数来解决，因为这里无需解运动方程，只要它的第一积分，即机械能守恒的公式：

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)=\text{常量}, \quad (10)$$

无量纲化后得：

$$\frac{E}{mgl}=H=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+1-\cos\theta=\text{常量}, \quad (11)$$

由此可解得：$\dot{\theta}=\pm\sqrt{2(H-1+\cos\theta)}$， (12)

此式给出 θ 和 $\dot{\theta}$ 的关系. 给定能量 H 的各个值，用一本三角函数表或一个计算器，我们就可按此公式在坐标纸上描出如图 5a 所示的相图来. 中心 O 点对应单摆下垂的平衡位置，其能量最低，是个稳定的不动点. 从 O 向外扩展，能量逐渐增高. 由图可以看出，在中央部分相轨道都是一些闭合回线. 对于低能量值，回线接近于圆形，这是与线性理论一致的；能量越高，回线越扁，且两端凸出渐呈尖角状. 当能量达到一定数值时 ($H=2$)，振幅达到 $\pm\pi$，轨线上出现鞍点 G,G'，那里相当于单摆垂直倒立位置，是个不稳定的不动点. 能量再高，轨线不再闭合，这对应于单摆沿正或反两个方向旋转起来，不再往复摆动的情况. 这种鞍点叫做异宿点 (heteroclinic point)，连接异宿点的轨线叫分界线 (separatrix) (见图中粗线)，它把单摆旋转和摆动两种不同类型的轨道分开. 从一个异宿点到另一异宿点的轨线叫做异宿轨线. 在这里也就是图中的分界线. 图 5a 中的横坐标是角度，它的取值是以 2π 为周期的，$\pm\pi$ 处的异宿点实际上对应着同一位置. 所以我们应该把图 5a 卷起来，把 G,G' 两点粘在一起，如图 5b 那样. 于是相空间变成柱面，异宿点合为同宿点 (homoclinic point)，异宿轨线变成从同宿点回到它自身的同宿轨线.

相图的作法是上世纪末法国伟大的数学家庞加莱 (H. Poincare) 发明的. 在相图中失去的是 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 变化的时间信息，得到的是有关动力学系统运动的全局概念，给出其轨线形态类型及其拓扑结构的稳定性问题. 相图的描述方法是非线性动力学里最基本的方法，其重要意义是怎么也不会被估计得过分的. 在科学中往往有这种情况，一个问题久久不能解决，但是换一个提法，从另一条思路去考虑，便会豁然开朗. 18，19 世纪大批数学家们集中精力，解出大量很难解的微分方程，对于线性微分方程还形成了一套系统的求解方法. 可是远非所有微分方程的解可用初等函数表示出来，即使用未积出的积分式来表达也未必能行. 然而，为什么非要用传统的方式解微分方程不可呢？庞加莱另辟蹊径，把微分方程的解看作是由微分方程本身所定义的积分曲线族，在不求出解的情况下，通过直接考查微分方程的系数及其本身的结构去研究它的解的性质. 上述相图中的轨线就是动力学方程的积分曲线族. 庞加莱所开拓的这一新领域，称为微分方程的定性理论，至今有着深远的影响. 在当前热门的非线性动力学里，除"相图"外，还有许多重要概念，如"分岔"、"极限环"、"庞加莱映射"、"庞加莱截面"等，都归根溯源到庞加莱.

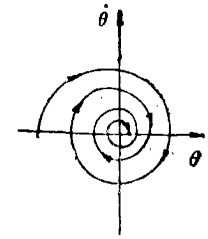


图 6 阻尼振荡的相轨道

(2) 有阻尼无驱动 ($f=0$) 情形

这时的运动方程为

$$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\sin\theta=0. \quad (13)$$

对于线性振动 ($A\ll 1$, $\sin\theta\cong\theta$)，按 $\beta>,=,<1$ 三种情况，阻尼振子的运动状态分为过阻尼、临界阻尼、阻尼振荡三种形式，这是通常在普通物理课中都要讲的. 反映在相图中，由于能量耗散，图 2b 中的闭合轨线消失，阻尼振荡的轨线是向内旋转的对数螺线，无论从哪里出发，最后都趋向中心(见图 6). 我们说，中心点 O 是个"吸引子 (attractor)"，它把相空间里的点都吸引到自己上边. 中心点 O 同时又是一个不动点，它是最简单的一类吸引子，即不动点吸引子. 现在我们来看任意大振幅的非线性情况，相图如图 7 所示. 中心部分与线性情况差不多，不再多说，注意看鞍点和分界线附近的情况. 有了阻尼，单摆从垂直向上倒立的初始位置自由下摆时，再也回不到原有的高度，它将作振幅递减的阻尼振荡. 反映在相图上，就是从一个异宿点出发的轨线因能量耗散而向里卷绕，不再通过另一异宿点，因而异宿轨线消失. (待续)

图 7 阻尼摆的扩展相图