

从单摆到混沌

赵凯华

(续前)

分形点集的维数有许多种定义,其中一种是容量维数 (capacity dimension). 取边长为 ε 的 n 维小方盒(一维时为长度等于 ε 的线段,二维时为边长等于 ε 的正方形,三维时为边长等于 ε 的立方体,等等),设覆盖该点集所需小盒的最低数目为 $N(\varepsilon)$. 对于通常我们所熟悉的规则形体, $N(\varepsilon)$ 是不难计算的. 例如,覆盖一根单位长度的线段需要 $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ 个小盒,覆盖一个单位边长的正方形需要 $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^2$ 个小盒,覆盖一个单位边长的立方体需要 $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^3$ 个小盒,等等. 可见维数 d 可定义为

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (25)$$

这定义可推广到分形点集上,作为其容量维数的定义.

数学家们人为地构造出许多分形来,它们的维数是可以严格计算出来的. 标准的例子是康托尔 (Cantor) 集合(见图 33). 取一单位长度的线段,将它三等分,除去中间那段,留下左右两段: 下一步将剩下的两段如法炮制,即三等分后除去中间一段. 将此操作无限地重复下去,所剩点集即为康托尔集合. 显然,对于这个康托尔三分集合, $N(\varepsilon)$ 与 ε 的关系如下:

ε	$N(\varepsilon)$
1	1
1/3	2
1/9	4
1/27	8
1/81	16
...	..

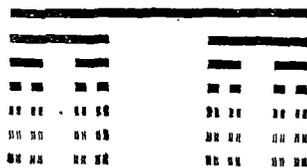


图 33 康托尔三分集合

于是得康托尔三分集的维数为

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$$

上述构造康托尔集合的方法,是一种压缩映射的特例,该法把图形的整体分别压缩地映射到它的几个局部范围,再以每个局部作为整体重复此操作,反复迭代,以至无穷(见图 34). 这样得到的分形可看做是广义的康托尔集合. 显然,斯梅尔线圈的横截面(参考图

29)就是这样的康托尔集合,洛伦茨吸引子的截面也属于这类分形集合. 可见,奇怪吸引子在几何上是分形的,刻划它的一个指标是它的分形维数. 混沌和分形的概念同是在七十年代发展起来的,起初似乎彼此无关,后来才发现,原来它们在数学上是表兄弟,有着密切的血缘关系.

现在让我们回过头看 §2 中讨论的单摆运动. 在图 10 和 14 中相轨道和庞加莱截面的长期特征都呈现了貌似无规的游荡行为. 这是个混沌吸引子吗? 它们是否具有分形结构? 图 35 a, b, c 分别给出参数为 $f = 1.5, \beta = 1/8, \rho = 2/3$ 时庞加莱截面在不同放大

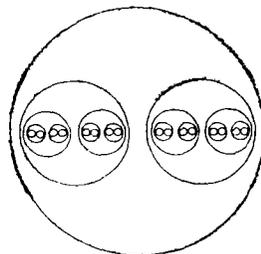


图 34 用压缩映射构造分形集合

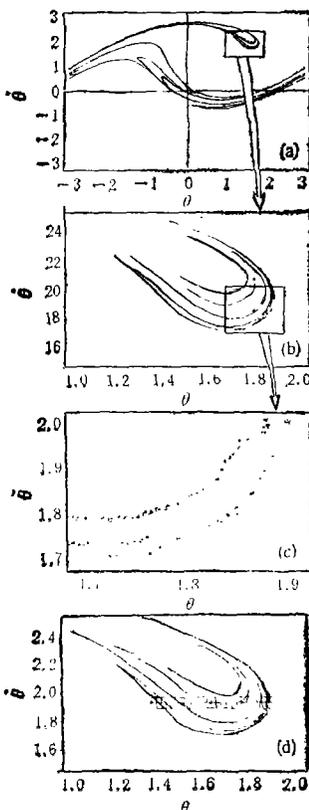


图 35 单摆混沌吸引子的分形结构

倍数下的变焦特写(这组参数与图 14 中参数的差别只是阻尼 β 小了一半),看起来它是具有无穷细微的分形结构的. 如果我们用小盒覆盖的办法去测它的容量维数(见图 35d),所得结果是 $d = 1.3 \pm 0.1$.

(2) 李雅普诺夫指数

混沌吸引子的初值敏感性可以用李雅普诺夫指数很好地刻划出来. 在运动过程中一对相邻相点之间的距离 σ 随时间 t 变化着,一般说来变化是指数式的,即

$$\sigma(t) \cong \sigma_0 e^{\lambda t}, \quad (26)$$

d. 用小盒覆盖法求分形维数

不过在多维的相空间里,沿不同的方向指数 λ 往往是不同的.若在某时刻在一个相点周围取一球形邻域,过一段短暂时间后它将变成椭球(图36),在它的几个主轴方向上的指数 $\lambda_i(i=1,2,\dots)$ 称为李雅普诺夫指数.李雅普诺夫指数可以是局域的,也可以是全局性的.计算全局性的李雅普诺夫指数时需要沿相轨道作平均.在 $\lambda_i > 0$ 的方向上相空间伸展,在 $\lambda_i < 0$ 的方向上相空间收缩.如§4(1)中所述,耗散系统的相空间体积是收缩的,不管有无驱动力,具有线性阻尼的动力学系统相体积收缩的指数是 $-\gamma$.或用无量纲的方式表达,为 -2β .受迫振动的相空间是三维的(参见

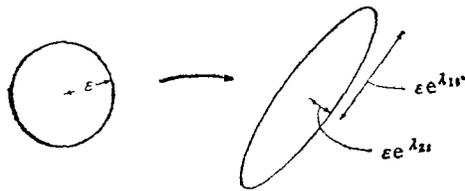
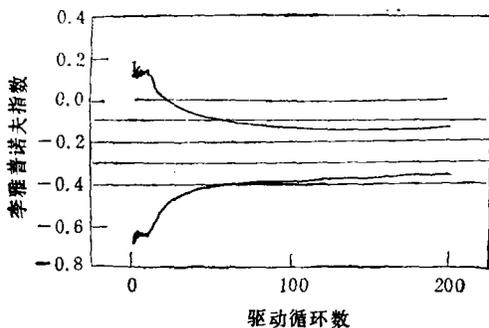


图36 李雅普诺夫指数

§2),其中三个李雅普诺夫指数 λ_1, λ_2 和 λ_3 ,它们之和应等于相体积的收缩指数:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2\beta, \quad (27)$$

所以不可能三个李雅普诺夫指数都是正的.在同一轨道上的相点,后者跟随前者亦步亦趋,故沿相轨道方向上的李雅普诺夫指数(譬如叫它 λ_1)平均起来总是等于0的.对于周期解,吸引子为极限环.其余两个李雅普诺夫指数都是负的.对于混沌解,吸引子是奇怪吸引子,其余两个李雅普诺夫指数一正一负.正李雅普诺夫指数意味着初值敏感性,是奇怪吸引子和混沌运动的象征.图37和38给出用计算机计算单摆李雅普诺夫指数的情况,在曲线的开头有一段暂态过程.其后趋于定值.图37的参量为 $f=1.125, \beta=1/4, Q=2/3$,运动是周期性的, λ_1 和 λ_2 皆负.图39的参

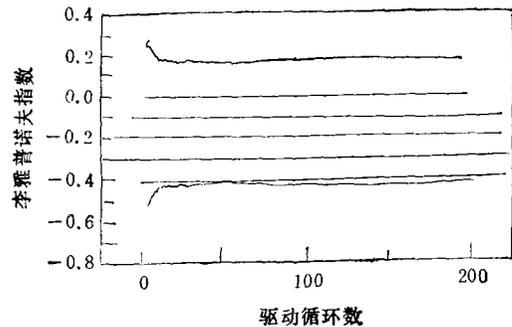


$\beta=1/4, Q=2/3, f=1.125$ (周期性运动)

图37 单摆的李雅普诺夫指数

量为 $f=1.4954, \beta=1/8, Q=2/3$,运动是混沌的, λ_1, λ_2 一正一负.可以验证,在计算误差范围之内,两

图中所有李雅普诺夫指数之和等于 -2β .



$\beta=1/8, Q=2/3, f=1.4954$ (混沌)

图38 单摆的李雅普诺夫指数

§6. 走向理解

混沌之路(一)——
倍周期分岔

上文努力刻画了一下什么是混沌,然而并未说明产生混沌的机制是什么.下面用三节篇幅回答这个问题.回答清楚这一问题不大容易,因为这将受到我们当前的认识水平所限.这里罗列的几点带有举例的性质,它们并非彼此互不相关.

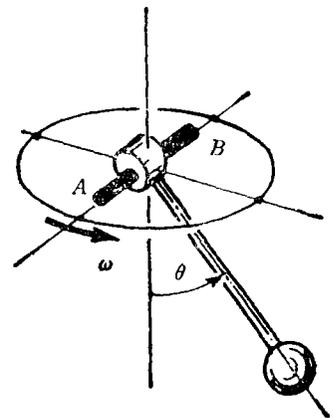


图39 摆面旋转的摆

分岔(bifurcation)是微分方程理论中的一个名词,最初可能是庞加莱提出来的.在此之前德语中已出现Abzweigung一词(大概是C.雅可比最先使用的),二者都包含一分为二(bi-, zwei)的意思.后来这个词的含义被推广,现已泛指在一个动力学系统中,当控制参量改变时,其相图发生拓扑结构的突然变它.所以分岔的概念常与突变(catastrophe)或动力学相变(dynamical phase transition)混用.

细分起来,分岔有许多种.全面地介绍分岔概念本身不是本文的任务,下面只谈叉式分岔、霍普夫分岔和倍周期分岔三种.

(1) 叉式分岔(pitchfork bifurcation)

看图39的例子.摆的水平轴AB以恒定角速度 ω 转动.摆偏离铅垂线的角度用 θ 来表示.此摆的运动方程为

$$m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - m l \omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ \cong m(l \omega^2 - g) \theta - (m/l)(4l \omega^2 - g) \theta^3, \quad (28)$$

上式右端第一项为重力,第二项为惯性离心力.此系

统的势能为

$$V = mgl(1 - \cos \theta) - (m/4)l^2\omega^2(1 - \cos 2\theta) \\ \approx \frac{ml}{2} \left[(l\omega^2 - g)^2 - \frac{1}{12} (4l\omega^2 - g)^2 \theta^4 \right] \quad (29)$$

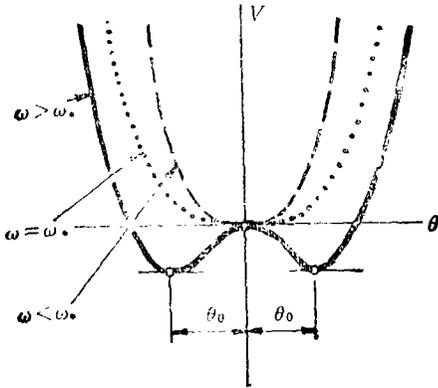


图 40 势能曲线

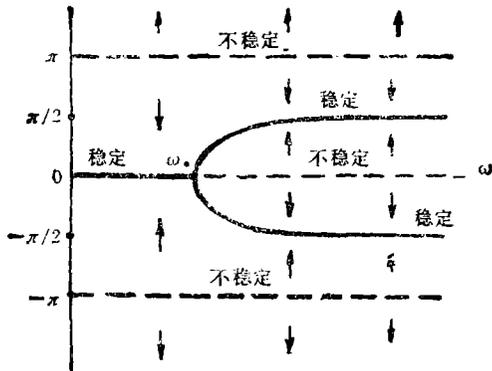


图 41 叉式分岔

上式右端第一项为重力势能，第二项为惯性离心力的等效势能。如果摆的质量、摆长等为常量，而取 ω 作为系统的控制参量，则不同 ω 值下的势能曲线如图 40 所示。用 θ_0 代表 θ 的平衡值，即势能取极值的位置，则 θ_0 和 ω 的关系如图 41 所示。当 ω 较小时，势能曲线在当中有一个极小值， $\theta_0 = 0$ ；当 ω 渐增跨超临界值 ω_* 时，势能原来的极小变成极大，两侧各出现一个新的极小值，亦即平衡位置 $\theta_0 = 0$ 失稳，同时出现两个新的平衡位置。在 $\theta_0 - \omega$ 图上呈现叉状分岔曲线，这便是叉式分岔现象。 ω 的临界值可由(29)式中 θ^2 项的系数等于 0 来确定，由是得 $\omega_* = \sqrt{g/l}$ 。跨超临界值 ω_* 后的平衡位置亦可由(29)式的极小值位置求得：

$$\theta_0 = \pm \sqrt{6(\omega^2 - \omega_*^2)/(4\omega^2 - \omega_*^2)}$$

以上例子是由一个不动点变到两个不动点。像图 8 所示单摆的受迫振动由一个极限环过渡到两个极限环，也是一种叉式分岔行为。

(2) 霍普夫分岔 (Hopf bifurcation)

• 44 •

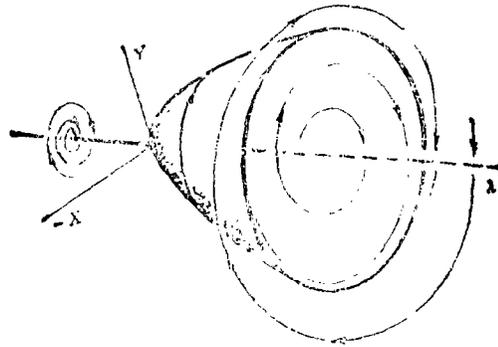


图 42 霍普夫分岔

在一个动力学系统中当控制参量 λ 改变时，一个平衡态失稳，同时长出一个极限环来（见图 42），这种分岔叫做霍普夫分岔。在 §3 中讲的软激励的自激振荡就属于这种分岔行为，在那里我们已经较详尽地介绍了，此处只提出这个名词，不再多作讨论。

(3) 倍周期分岔 (period-doubling bifurcation)

1831 年法拉第观察到，一个浅容器以频率 ω 在铅直方向振荡时，其中的水以 $\omega/2$ 的频率振荡，这便是所谓次谐波 (subharmonics)。瑞利在他的名著《声学原理 (The Theory of Sound, 1877)》里对这类现象进行了理论分析，并提出另一个产生次谐波的简单实验。瑞利的装置如图 43 所示，一根弦一头固定，另一头系在音叉的一脚上，以频率 ω 作纵向振荡。弹拨此弦，它将以频率 $\omega/2$ 作横向振动。无论多么弱的非线性都可以产生基频整数倍的傅里叶谐波，但分数频率的次谐波却是一种阈值现象，非线性不达到一定程度，它是激发不起来的。这一点是二者最重要的差别，也是次谐波现象更为费解的地方。1981 年，人们用现代

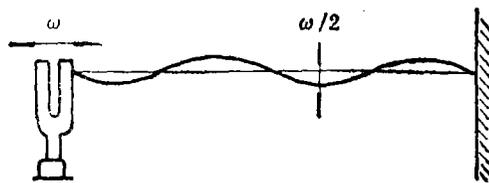


图 43 瑞利的次谐波实验——弦的参量振荡

化的手段重复了法拉第的实验，得到的不仅是二分频，还有 $1/4, 1/12, 1/14, 1/16$ 等一系列分频，它们各有自己的阈值。分数频率意味着周期倍化，故在控制参量达到一个阈值时激发起次谐波的现象，又叫倍周期分岔。为什么 150 年后科学家们还要精心地重做法拉第的实验？因为人们已经知道，一系列的倍周期分岔预示着浑沌的到来。

在 §2 中我们已经看到单摆的倍周期分岔行为，图

9 第一次显示了倍周期分岔现象,从图11过渡到图12,也是一次倍周期分岔. 图13则显示了再一次的倍周期分岔,形成四倍周期的振荡. 到了下面的图 14,运动已进入混沌状态. 单摆究竟还是太复杂了一点,它是怎样通过一系列倍周期分岔进入混沌状态的? 细致的过程这里不易看清楚,有必要借助更简单的数学模型. 典型的模型是逻辑斯谛映射.

逻辑斯谛映射 (logistic map) 是个生态模型. 设想有一种无世代交替的昆虫,在一个有限的环境中生息繁衍. 令 N_i 代表第 i 代种群的总数, N_c 代表环境能够支撑和供养种群数量的最大限额, 则 $x_i = N_i/N_c$ 为约化的种群数量. 若无环境的限制,子代种群数量 x_{i+1} 将正比于亲代的种群数量 x_i . 为了反映出环境的限制,我们假定 x_{i+1} 还正比于 $(1 - x_i)$. 于是得到

$$x_{i+1} = \lambda x_i(1 - x_i), x_i \in [0, 1] \quad (30)$$

这迭代关系就是逻辑斯谛映射. 给定一个初始值 x_0 , 代入上式的右端,即得左端的 x_1 ; 再把 x_1 代入右端,

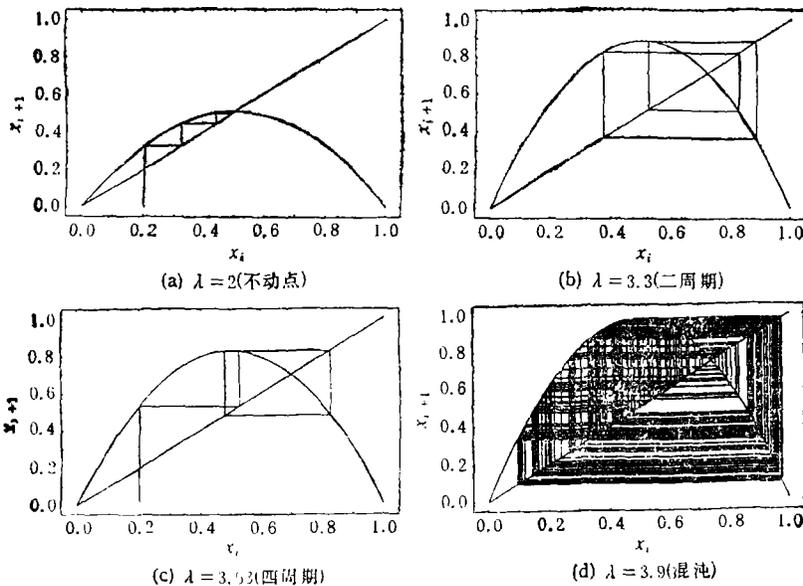


图 44 逻辑斯谛映射的迭代图解与终态集

又得左端的 x_2 ; 如此等等. 一直迭代下去. 这里只须用便携式的计算器就可以计算,比解单摆运动的微分方程简单多了. 迭代过程还可以用图解来示. 图 41 中的抛物线代表(30)式右端的迭代函数, 对角直线代表 $x_{i+1} = x_i$ 的关系. 给定一个初始值 x_0 (譬如 0.2), 作竖直线遇抛物线于高度 x_1 ; 然后作水平线将此高度移植到对角线上面, 再由此作竖直线遇抛物线于高度 x_2 ; 如此等等, 反复迭代下去.

从任何初始值出发迭代时,一般有个暂态过程. 但我们关心的不是暂态过程. 而是它所趋向的终态集,

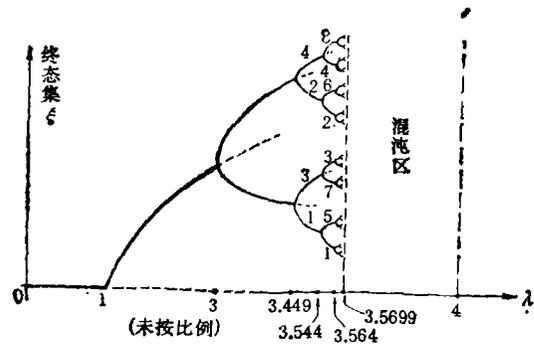


图 45 逻辑斯谛映射的倍周期分岔序列示意图

即吸引子. 在图 44(a)的情况里,参数 $\lambda = 2$, 迭代趋于一个不动点, 即抛物线与对角线的交点. 到了图 44(b), 参数 λ 增至 3.3, 迭代的终态在一个长方形上循环, 亦即 x_i 在两个值之间往复跳跃. 这是一个二周期解, 对应于连续动力学系统中的极限环. 所以, 从图 44(a)到 44(b), 中间发生了一次霍普夫分岔. 图 44(c)

是 $\lambda = 3.53$ 的情况, 最终 x_i 在四个值之间循环跳跃, 即终态集是个四周期解. 这里发生过一次倍周期分岔. 图 44(d) 参量为 $\lambda = 3.9$, 看起来已经进入混沌区.

由于逻辑斯谛映射的计算非常简单, 人们对它步入混沌区的过程研究得非常细致. 计算表明, 第一次分岔发生在 $\lambda = 3$ 的地方, 其后发生一个无穷系列的倍周期分岔, 相应的参数值为 3.449, 3.544, 3.564, ..., 其间隔越来越小, 到了极限值 $\lambda = 3.5699$ 的地方进入混沌区 (见图 45). 在 λ 从 3.5699 到 4 的参数范围内情况是极为复杂的. 这里基本上是混沌区, 但在其中有

无穷多个周期解的大小窗口, 窗口里又有无穷多个倍周期分岔系列. 这些情况可在图 46 中看出来. 此图反映的是逻辑斯谛映射的终态集随参数 λ 变化的情况, 它叫做映射的分岔图 (bifurcation diagram). 作为对比, 我们把单摆以驱动力强度 f 为参量的分岔图也并放在这里 (图 47). 可以看出, 它们都有无限丰富的分形结构. 定性地说, 两者何其相似乃尔. (待续)