

# 论潮汐力的动力学效应

魏 凤 文

对潮汐力的精确讨论,需应用爱因斯坦的广义相对论.在这个理论中,潮汐力场为4维空间的黎曼曲率张量,由它出发可以直接给出引力场中两个自由粒子间的相对加速度,因而可以较方便地得出潮汐力的精确表述.本文采用近似的讨论方法,即利用牛顿的引力理论,并将引力场源视为质量按球对称分布.一般天体的引力场均可视为弱引力场,牛顿引力理论将具有足够的精确性,所以这种近似方法对一般情况是适用的.

## 一、潮汐力的产生

潮汐力是由引力场的不均匀分布产生的.当一个物体体积大小不可忽略或一组质点体系的线度不可忽略时,在引力场中,它们的质心除了受到引力作用外,还由于引力场的不均匀性,使其上各个质点受到彼此拉开或挤压的外力,这种力可使体系发生形变,甚至分崩离析.在这种力的作用下,地球表面的海水做潮汐运动,故称这种力为潮汐力.

下面用一个简单的例子加以说明.设想两个质量各为  $m$  的小球  $A$  和  $B$ ,用一根质量可以忽略的细杆相连接.坐标轴  $OZ$  沿杆心与地心  $O'$  的连线方向.当细杆沿  $OO'$  放置时,  $A$ 、 $B$  球与  $O$  相距均为  $Z$ ,如图1示.杆心与地心相距为  $r_0$ .当  $A$ 、 $B$  球随杆一起向地心自由下落时,根据牛顿的引力理论,  $A$  球下落的加速度为

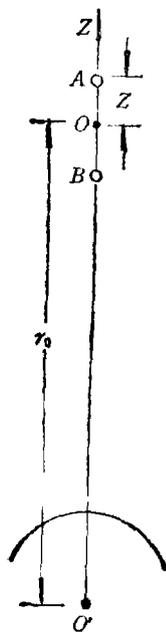


图 1

将上式展开,考虑到  $z \ll r_0$ ,忽略高阶小量,可得

$$-\frac{GM}{(r_0 + Z)^2} + \frac{GM}{r_0^2} \approx 2Z \frac{GM}{r_0^3}.$$

$$-\frac{GM}{(r_0 + Z)^2},$$

B 球为

$$-\frac{GM}{(r_0 - Z)^2},$$

杆心  $O$  为

$$-\frac{GM}{r_0^2},$$

其中  $M$  为地球的质量.  $A$  球相对  $O$  点的加速度为

$$-\frac{GM}{(r_0 + Z)^2} + \frac{GM}{r_0^2}.$$

同样  $B$  球相对  $O$  点的加速度为

$$-2Z \frac{GM}{r_0^3}.$$

以上结果表明,相对于原点  $O$ ,  $A$ 、 $B$  球受到的力大小相等、方向相反,该力的大小为

$$f_x = 2Z \frac{GMm}{r_0^3} \quad (1)$$



图 2

这对作用力力图把  $A$ 、 $B$  分开,这就是地球引力潮中,质点体系所受的沿竖直方向的潮汐力.平行于地球表面的横向潮汐力可按同样方式计算.令细杆沿垂直于  $OO'$  方向放置.坐标轴  $OX$  沿  $AB$ ,如图2示.相对原点  $O$ ,  $A$  球沿  $X$  方向的加速度为

$$\frac{GM}{r_0^2} \cos \alpha = \frac{GM}{r_0^2} \frac{X}{(X^2 + r_0^2)^{1/2}} = \frac{GM}{r_0^3} X.$$

这表明,  $A$  球受到的横向潮汐力为

$$f_x = X \frac{GMm}{r_0^3} \quad (2)$$

同理,  $B$  球受到的横向潮汐力与之大小相等、方向相反,这对横向力图把  $AB$  挤向中心  $O$ .由

此可推知,当一滴水悬浮在地球引力场中时,由于受到潮汐力的作用,沿竖直方向被拉长,沿横向被压缩,该水滴将呈一椭球状,其长轴沿与地心连线的方向.

## 二、海水的潮汐运动

地球表面的大部分被水覆盖,地球类似一颗大水滴,同时受到月球与太阳的引力作用.由于太阳的引力场对地球的潮汐力作用较弱,暂只考虑月球的潮汐力作用.假定地球表面上某质点的质量为  $m$ ,坐标为  $X$ 、

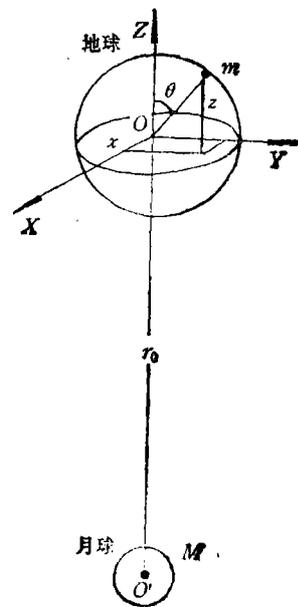


图 3

$Y$ 、 $Z$ ,坐标轴  $OZ$  沿月地连线,如图3示,可粗略地

作者单位:北京首都师范大学物理系,邮编:100037

估计出,由月球引力潮汐力引起的潮汐起落差的最大值大约为 53 厘米,而由太阳引力潮汐力产生的相应值大约为前者之半。

事实上,地球在不断地自转,海洋也不断地受到按月和按 24 小时为周期的潮汐强迫力作用而做复杂运动,如果海水固有频率比潮汐强迫力频率大很多,海水将按潮汐强迫力的频率振荡,并保持其准静态;如果受地形、区域所限,海水的固有频率与潮汐强迫力频率相差不多,这时就有可能出现逆潮汐运动;当两个频率很接近时,还有可能发生规模巨大的潮汐活动。例如,在加拿大的芬迪湾,潮汐起落差可达 21 米,涨、落潮速可达每小时 2.4—3.4 米,潮波波峰 0.9—1.8 米,每日的潮汐流量可达 20 亿立方米。潮汐的发电潜力很大。

潮汐力不仅能引起天体表面海洋的潮汐运动,还能引起天体气层发生大气潮及天体内部不同壳层间相对运动的固体潮。潮汐摩擦将消耗天体在引力场运行中的总能量,使其运行轨道变化或运行速度减慢。

### 三、利用潮汐力检测引力场

通常认为,由于卫星内部处于失重状态,单纯通过在其内部的实验,不能检测到地球引力的存在,内部的实验者将判断不出卫星是在引力场中自由下落(环绕运动等同于自由下落)还是在远离引力场的地方处于静止。这种说法实际上忽略了引力场的潮汐力作用。事实上,由于潮汐力的存在,地球引力场不能通过卫星的自由下落运动而完全消除。

假设在环绕地球运行的卫星中,有一颗悬浮着的水滴,由于潮汐力的作用,它沿竖直方向被拉长,而沿横向则被缩短,利用水滴的形变就可以检测到地球引力场的存在。但这种说法只适用于表面覆盖一薄层水的“水滴”,对于完全由水组成的水滴,还应计及由水滴

形状变化而引起的引力场改变。另外,这里忽略了水的表面张力作用。在水滴较小时,表面张力不可忽略,它将对潮汐力引起的形变有限制作用。因此,用水滴检测引力的方法并不实用。

为避开表面张力的麻烦,可以用固体代替液体实验。在卫星内部,放置一根匀质细棒,棒心为  $O$  直角坐标系的原点, $OZ$  轴沿竖直方向,如图 4 所示。地球引力场的潮汐力将使棒受到潮汐力矩的作用。对  $OX$  轴的潮汐力矩为

$$L_x = \iint \left[ Y \left( 2Z \frac{GM}{r_0^3} \right) - Z \left( -Y \frac{GM}{r_0^3} \right) \right] dm,$$

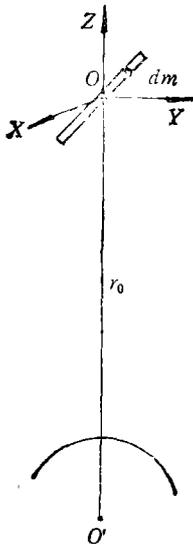


图 4

式中  $dm$  是坐标为  $(X, Y, Z)$  处的小质元质量。整理上式,可得

$$L_x = \frac{3GM}{r_0^3} \int YZ dm = -\frac{3GM}{r_0^3} I_{YZ} \quad (3)$$

式中  $I_{YZ}$  为棒的转动惯性矩张量的  $YZ$  分量。按同样方式,可以得出潮汐力对  $Y$  及  $Z$  轴的力矩分别为

$$L_y = \iint \left[ -Z \left( \frac{GM}{r_0^3} X \right) - X \left( \frac{2ZGM}{r_0^3} \right) \right] dm \quad (4)$$

$$= \frac{3GM}{r_0^3} I_{ZX}$$

$$L_z = \iint \left[ Y \left( \frac{GM}{r_0^3} X \right) - X \left( \frac{GM}{r_0^3} Y \right) \right] dm = 0 \quad (5)$$

如果没有其他力,在潮汐力的作用下,棒的自旋角动量  $K$  将发生变化,自旋角动量沿  $X$  轴分量的变化率为

$$\frac{dK_x}{dt} = -\frac{3GM}{r_0^3} I_{YZ} \quad (6)$$

若在卫星内部进行局域检测,棒的线度不可能很大,转动惯量的数量级将为  $I_{YZ} \sim ml^2$ ,  $l$  为棒的长度。转动角动量的数量级  $K \sim ml^2\omega$ ,  $\omega$  为棒的转动角速度。将上述值代入(6)式,可以明显地看出,棒的角加速度与棒的长度无关。因此,在

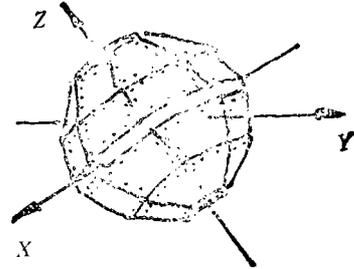
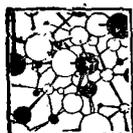


图 5

棒的线度不大的情况下,由于棒长不影响局域测量结果,可以通过对棒角加速度的测量检测地球引力,从而判断出卫星的运动,而无需借助外部的参照物。如果棒具有自旋初速度,潮汐力将使棒产生进动,地球自旋的二分点进动(equinoctial precession)就是由太阳和月球引力场对地球赤道膨胀部分的潮汐力所产生的。

### 四、潮汐力对卫星姿态的控制

当卫星沿图 5 示的  $Z$  轴运行时,它的转动姿态包括绕  $Z$  轴的自旋、绕  $X$  轴的仰俯与沿  $Y$  轴的滚转三种方式。当受到某种力矩(如空间电磁场的电磁力矩、太阳辐射压力矩或所携带火箭的气动力矩等)作用时,卫星的运行姿态有可能失去稳定。对卫星运行姿态进行稳定控制的方式很多,较常用到的如自旋稳定控制,令卫星绕自身轴旋转,利用陀螺运动的定轴性,可使其沿自旋轴在惯性空间中定向,这种姿态控制的方式简单,因为运载火箭常以自旋方式入轨,卫星无需附加其他装置即可具有自旋状态。但这种方式只能控制沿一个轴的轴向转动,当干扰力矩过大时,还需加设自旋速度的控制系统。此外,由于卫星的自旋,天线往往不能定向,为保证与地面通信正常进行,还必须在天线底座加设一种消旋装置。然而利用潮汐力矩不仅可以使卫星受到一个稳定运行姿态的恢复力矩,还可以使卫星的



# 关于原子核的电四极矩

翁斯灏

## 一、原子核的电四极矩

原子核的内禀电四极矩, 来源于核电荷的非球形分布, 一般可用并矢或  $(3 \times 3)$  二秩不可约张量表示. 如果选择核自旋轴  $I$  (沿  $z$  轴) 为核电四极矩主轴, 由于核对自旋轴的旋转对称性, 电四极矩仅有一个独立分量, 称为标量电四极矩,

$$Q = \frac{1}{e} \int_{V_N} \rho(3z^2 - r^2) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{e} \int_{V_N} \rho r^2 (3\cos^2\theta - 1) dV_N,$$

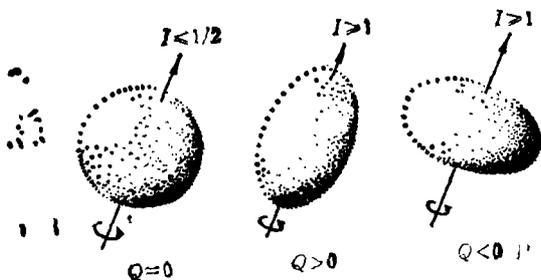


图1 原子核的电四极矩

式中  $e$  为质子电荷值,  $\rho$  为  $(r, \theta)$  处核电荷密度,  $r$  为积分点  $(x, y, z)$  至核中心距离,  $\theta$  为矢径  $r$  与核自旋  $I$  的夹角, 积分遍及全核  $V_N$ . 可见电荷呈球对称分布的核,  $Q = 0$ ; 沿自旋轴伸长的核,  $Q > 0$ ; 扁平的核,  $Q < 0$

(图1). 根据  $Q$  值的大小和符号, 可推知核偏离球形的程度. 与核的线度相对应,  $Q$  的单位为靶 (barn),  $1 \text{ 靶} = 10^{-28} \text{ m}^2$ . 量子力学证明, 核自旋  $I = 0$  或  $1/2$  的核,  $Q = 0$ , 只有  $I \geq 1$  的核才有非零的电四极矩. 自然界存在的 310 种稳定核 (包括半衰期很长的放射核) 中, 有核磁矩的约 130 多种, 有核电四极矩的约 90 余种.

## 二、电四极超精细相互作用

核电四极矩与核外电子云在核处产生的电场梯度 (EFG) 之间, 存在电四极超精细相互作用, Casimir 得出由此产生原子能级和分子振转能级电四极超精细分裂的量子力学表示:

$$\Delta E_Q = \frac{e q_j Q}{2I(2I-1)J(2J-1)}$$

$$\cdot \left[ \frac{3}{4} c(c+1) - I(I+1)J(J+1) \right]$$

$$= \frac{B}{2I(2I-1)J(2J-1)}$$

$$\cdot \left[ \frac{3}{4} c(c+1) - I(I+1)J(J+1) \right].$$

作者, 上海华东师范大学物理系, 邮编: 200062

一个轴总指向地面, 这一特点将有利于无线电通信的顺利进行. 潮汐力产生恢复力矩的原理可以用一个简单模型加以说明. 设卫星具有如图 6 示的哑铃型结构, 其质量分布在两个端球  $A$  与  $B$  上, 连接杆的质量可忽略不计,  $A, B$  距离为  $l$ , 质量分别为  $m$ . 当这一卫星沿轨道运行时, 若其姿态失稳, 以  $OX$  为轴 ( $OX$  轴垂直图面未画出) 仰俯运动的结果,  $AB$  线偏离  $OO'$  线, 转角为  $\theta$ , 质量  $A$  比  $B$  更靠近地心, 根据式 (3), 该卫星受到绕  $OX$  轴旋转的潮汐力矩大小为

$$L_x = \frac{3GM}{r_0^3} I_{YZ} \quad (7)$$

其中  $I_{YZ} = \int YZ dm = (Y_A Z_A + Y_B Z_B) m$ , 代入  $A, B$  的坐标, 可得

$$I_{YZ} = 2ml^2 \sin\theta \cos\theta = ml^2 \sin 2\theta \quad (8)$$

于是有

$$L_x = \frac{3GM}{r_0^3} ml^2 \sin^2\theta \quad (9)$$

该潮汐力矩  $L_x$  可使  $A, B$  恢复到原有的运动姿态. 对

一般刚体卫星, 例如形状为一旋转椭球体, 当对三个轴的转动惯量彼此不同时, 若  $I_{YZ} > I_{ZX} > I_{XY}$ , 由于潮汐力作用的结果, 卫星将使小转动惯量轴, 即  $Z$  轴稳定地指向地心, 而最大转动惯量轴, 即  $X$  轴将与卫星轨道平面相垂直. 这种姿态控制不用加太复杂的装置, 也无需能源, 控制过程完全自动进行, 可靠性强, 适于长寿命飞行任务的卫星使用. 此外, 利用太阳引力的潮汐力对环绕太阳的人造行星进行姿态控制, 还可以使太阳能电池板稳定地朝向太阳, 以保证持续的电能供应.

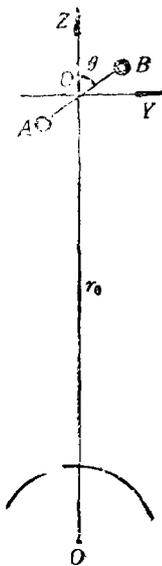


图 6