

从单摆到混沌

赵凯华

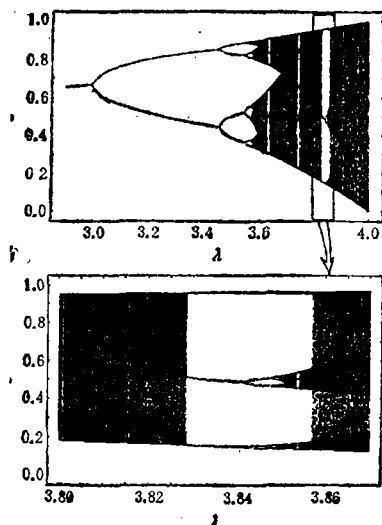


图 46 逻辑斯谛映射的分岔图

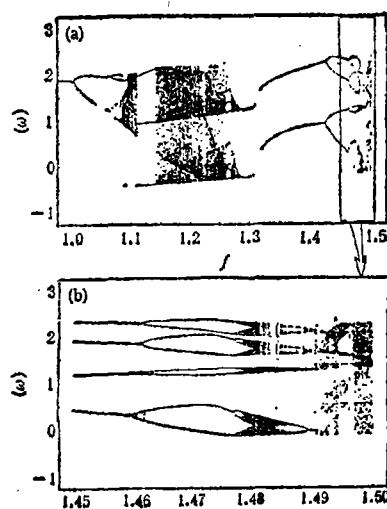


图 47 单摆的分岔图

(续前)

1978 年费根鲍姆 (M. Feigenbaum) 发现了有关倍周期分岔系列的一些性质。用 λ_k 代表第 k 次分岔出现时的 λ 值, 则相继分岔间隔之比趋于一个常数:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \delta = 4.6692016091029909 \dots \quad (31)$$

最令人惊讶的是此常数 δ 并不限于逻辑斯谛映射, 对于所有光滑的单峰映射, 如正弦映射 $x_{i+1} = \lambda \sin(\pi x_i)$, 得到的 δ 值精确地相同。这就是说, δ 的数值只依赖于单峰迭代函数极大值处的二次展开性质, 与函数的其他细节无关。 δ 现已命名为费根鲍姆常数, 它反映了沿倍周期分岔系列通向混沌的道路中具有某种普适性。

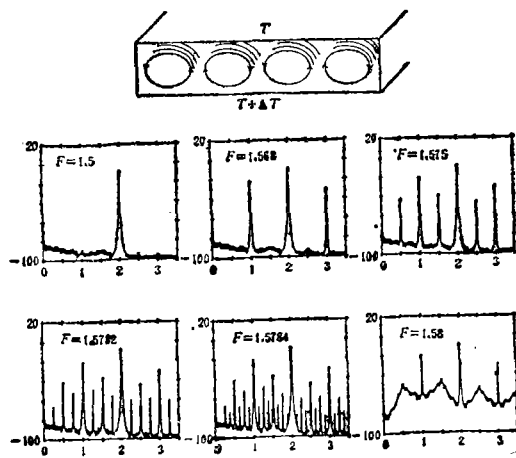


图 48 利布沙伯在液氮对流实验中发现的倍周期分岔序列

逻辑斯谛映射之类的单峰映射是较简单的数学模型, 人们自然感兴趣, 在真实的物理实验中是否也具有这种普适性? 1977 年利布沙伯 (A. Libchaber) 做了一个极为精致的液氮对流实验, 也在其中发现了倍周期分岔系列 (见图 48), 他当时感到大惑不解。1979 年他和费根鲍姆进行了接触, 知道了普适性这回事。他验算了自己的倍周期分岔实验数据, 所得结果确实和费根鲍姆常数还是比较接近的。看来混沌不是纸上谈兵, 而是实验事实! 那么单摆的情况怎么样? 其分岔图 47 给出的倍周期分岔序列为 $f = 1.066, 1.077, 1.080$, 由此算出的费根鲍姆数 $\delta = 4 \pm 1$, 在计算误差范围内可算得是与逻辑斯谛映射一致的。混沌现象中的普适性, 增强了我们对简单数学模型的信心。

§ 7. 走向理解混沌之路(二)——同步锁模

同步现象 (synchronization) 有许多其他叫法, 如锁相 (phase-locking), 锁频 (frequency-locking) 或锁模 (mode-locking) 等。17 世纪荷兰物理学家惠更斯注意到家里木板墙上两挂钟较近时会互相影响而同步。瑞利观察到两风琴管靠近时音调一致, 较远时则发生差拍。在电机工程技术中, 工程师们用频率较准的石英振子来使电机同步。在涉及两个频率的动力学系统中同步是一种比较普遍的现象, 但两振动模式之间必需有非线性的耦合。最先将同步现象与混沌联系起来的是拓扑学家们。

从天文到气象, 湍流在许多科学分支都非常重要, 在工程技术的实际问题中它也占有重要地位。湍流可以摧毁水管或输油管道, 折断轮船的螺旋桨, 或造成飞机失事。但由于问题太复杂, 长期以来人们对湍流的

* 赵凯华, 北京大学物理系, 邮编 100871

本质懂得甚少。苏联物理学家朗道认为：如果能把开始发生湍流的机制彻底搞清楚，则会对这个问题的解决带来新的希望。在一个高速运动的系统中产生最常见的失稳现象是发生颤动，亦即出现一种新的振荡模式。朗道认为，湍流起初是由三到四个不同的周期运动重叠在一起形成的：待湍流充分发展时，周期运动的数目已积累到无穷多。以上理论是朗道 1944 年提出的。按 § 6 中已给的概念，从运动失稳而产生新周期运动的现象叫做霍普夫分岔，这概念是霍普夫 1948 年提出的，他沿着朗道的思路做了更细致的研究。现今人们把这样一种从不断积累新周期运动走向湍流的设想叫做霍普夫-朗道道路。

霍普夫-朗道走向湍流的道路被广泛地接受了三四十年来，到了六七十年代一些拓扑学家开始对它怀疑了。设想在某个动力学系统中有频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两个周期运动，以它们的相位 θ_1 和 θ_2 为变量作二维相图。 θ_1 和 θ_2 都是以 2π 为周期的，取约化变量 $x_1 = \theta_1/2\pi$ 和 $x_2 = \theta_2/2\pi$ 将更为方便。 x_1, x_2 的相图可以是平面上的一个单位正方形(见图 49)，也可以将正方形的对边接起来，形成一个环面。如果两个周期运动之间无相互作用，而它们的频率之比又为有理数，即 $\omega_1/\omega_2 = p/q$ (p, q 为互不可约的整数)，则轨线在 x_1 方向绕 p 圈的同时在 x_2 方向绕 q 圈，然后闭合起来，恢复初始状态。亦即，这时运动仍是周期的。如果频率比 ω_1/ω_2 为无理数，则无论绕多少圈轨线也不会封闭，当然对于一个自治系统轨线也不会自我相交，于是它将稠密地分布在二维的环面上，永不重复已走的路(见图 50)。这种非周期的运动叫做准周期运动。拓扑学家派克索托 (M.M. Peixoto) 于 1962 年证明了一条定理，说环面上的准周期运动不是通有的运动形式，通有的运动形式是环面上具有有限个不动点和极限环。换句话说，准周期运动在拓扑上是结构不稳定的，稍有参量的变化，譬如引入微弱的相互作用，它就会过渡到某个周期解，即两频率之比变成某个与原来接近的有理数。这便是锁频现象。锁频作用使不同频率周期运动的数目不可能无限地积累下去。下

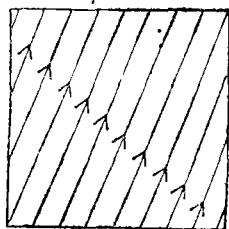


图 49 两个可公度频率合成周期运动

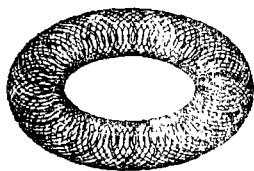


图 50 准周期运动

边我们将看到，少数几个周期运动经过锁频，也可走向

混沌和湍流。这正是 § 4 中提到的茹厄勒和塔肯斯的设想，现今世称走向湍流的茹厄勒-塔肯斯道路。

为了说明从同步走向混沌的道路，单摆的例子还是嫌太复杂了一点，我们从如图 51 所示的弹簧水滴系统入手。在弹簧下面挂一水桶，桶底有一小洞向外滴水，上有水的补充以保证其中水量基本不变[一个颤动的滴水龙头(见图 52)也可看作是这样的系统]。

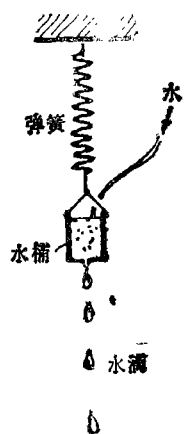


图 51 弹簧水滴系统

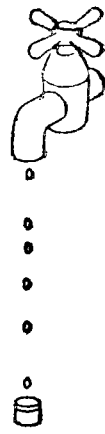


图 52 滴水的龙头

如果小桶静止，水滴的质量 m 随时间 t 变化的规律如图 53a 所示，它以线性率 c 增长到某个表面张力不再能支持的临界值 m_* 时，水滴便滴落下来， m 突跳回零。显然，静止液滴滴落的时间间隔为 $\tau = m_*/c$ 。当小桶上下振动时，它有一个周期性变化的加速度，其周期 T 由弹簧的劲度和水桶的质量决定(见图 53b)。

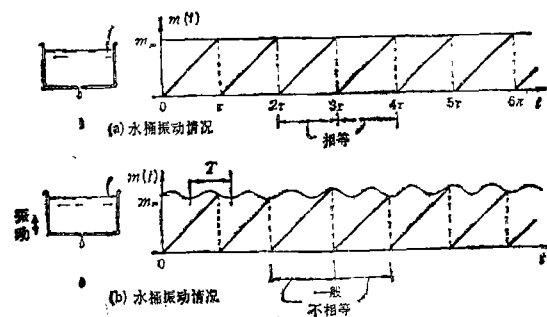


图 53 水滴脱落的同步问题

这相当于在水滴的重量上附加一个周期性的惯性力，从而等效的临界质量可写为 $m_*[1 + f(t/T)]$ ，这里 f 是个周期为 1 的函数。为了无量纲化，用 T 来约化时间 t ，用 cT 来约化质量 m ，则质量的增长率为 1，临界质量为 $(\tau/T)[1 + f(x)]$ ，这里 $x = \tau/T \pmod{1}$ 相当于以 2π 约化了的相位。相继两次滴水时的相位关系可由图 54 求出。图中由时轴上 A 点出发的 45° 斜线代表水滴质量的线性增长，顶部的曲线代表有效

