

·物理前沿· 学部委员钱临照教授主持

从单摆到混沌

赵凯华

系，图中的阴影区为锁定区域，它们用前苏联数学家的姓名形象地命名为阿诺尔德舌头 (Arnold tongue)。在 $K=1$ 处阿诺尔德舌头的宽度增大到开始彼此衔接。图 58a 给出了这

(续前)

现在来看非线性迭代，在图 56 中取了 $K=0.95$ ， $\Omega=0.404004\dots$ 。这次从初始值 $x_0=0.4$ 出发绕了两圈，经过五次迭代后闭合起来，即运动恢复了周期

时卷绕数 W 与 Ω 的关系，它是由无数个大大小小的平台和阶梯组成的，叫做魔鬼楼梯 (devil's staircase)。图 58b 是图 58a 的局部放大，可以看出，魔鬼楼梯是具有自相似分形结构的。

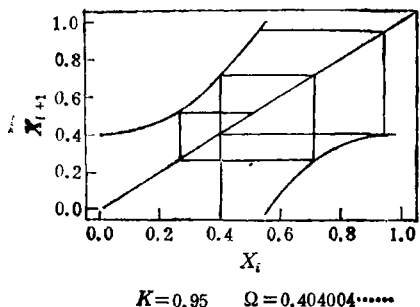


图 56 圆周映射的迭代图解

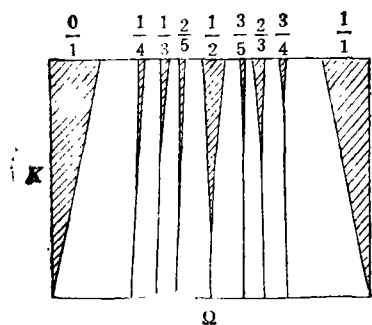


图 57 圆周映射的阿诺尔德舌头

性。

为了说明同步锁频现象，我们引进卷绕数 (winding number) 的概念，其定义为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - x_0}{n} \right), \quad (36)$$

在线性的情况下， $W = \Omega$ ，二者同为有理数或无理数。在非线性的情况下， W 锁定在与无理的 Ω 接近的有理数上。大体说来，有理数 p/q 的分母 q 越大，锁定的范围越窄。锁定范围的宽度还与 K 的大小有关，图 57 表达了这种关

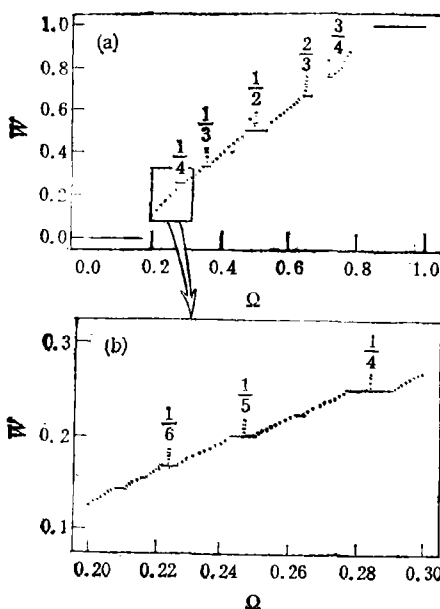


图 58 魔鬼楼梯

$K=1$ 是个临界值，超过此值，阿诺尔德舌头开始重叠。在重叠区 W 的取值与初始值有关。 $K > 1$ 时迭代函数不再是单调的了，曲线上出现了局域的极大和极小 (见图 59)。这意味着一个以上的 x_i 对应着同一个 x_{i+1} ，从而映射变为不可逆的了。逻辑斯谛映射是不可逆的，它在一定的参量值下出现混沌。映射的不可逆性是产生混沌的必要条件。这里当 $K \geq 1$ 时，确实也有某些 Ω 值会导致混沌。

圆周映射走向混沌有多种途径，图 60 给出有代表性的三

种。(a) 从 W 为无理数的区域进入阿诺尔德舌头 (即从准周期运动过渡到周期性的锁相状态)，最后当 K 超过临界值时进入混沌。(b) 始终处在阿诺尔德舌头外

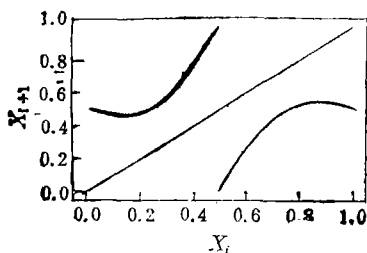


图 59 圆周映射变为不可逆

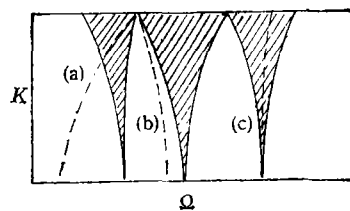


图 60 圆周映射走向混沌的各种途径

的准周期区, 然后从两阿诺尔德舌头的衔接处进入混沌状态。(c) 始终处在阿诺尔德舌头内的锁模状态下, 当 k 超过临界值后, 通过一系列倍周期分岔走向混沌。最后这一途径很像逻辑斯谛映射。逻辑斯谛映射是单参量的, 而圆周映射有两个参量, 故而它走向混沌。

f 的取值范围	运动形式	卷绕数 W
$f < 1.085$	周期	0
$1.085 < f < 1.11$	混沌*	$S \cdot 0$
$1.11 < f < 1.14$	周期	0
$1.14 < f < 1.22$	混沌	弥散的
$f \approx 1.22$	周期	$\pm 2/3$
$1.22 < f < 1.26$	混沌	弥散的
$1.26 < f < 1.28$	混沌*	$S \pm 1$
$1.28 < f < 1.475$	周期	± 1
$1.475 < f < 1.485$	混沌*	$S \pm 1$
$1.485 < f < 1.493$	周期	± 1
$1.493 < f < 1.495$	混沌	弥散的
$1.495 < f < 1.497$	周期	$\pm 2/3$
$f > 1.497$	混沌	弥散的

* 有多个混沌吸引子

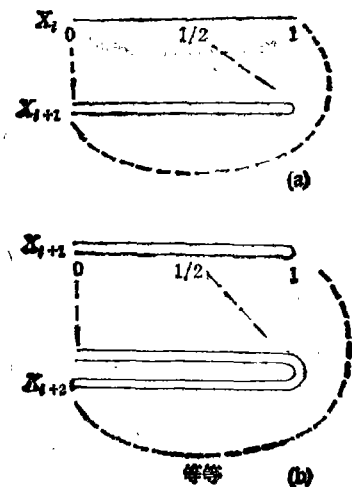


图 62 逻辑斯谛映射中的伸展与折叠



图 63 在庞加莱截面上从鞍点邻域出发构造稳定流形和不稳定流形

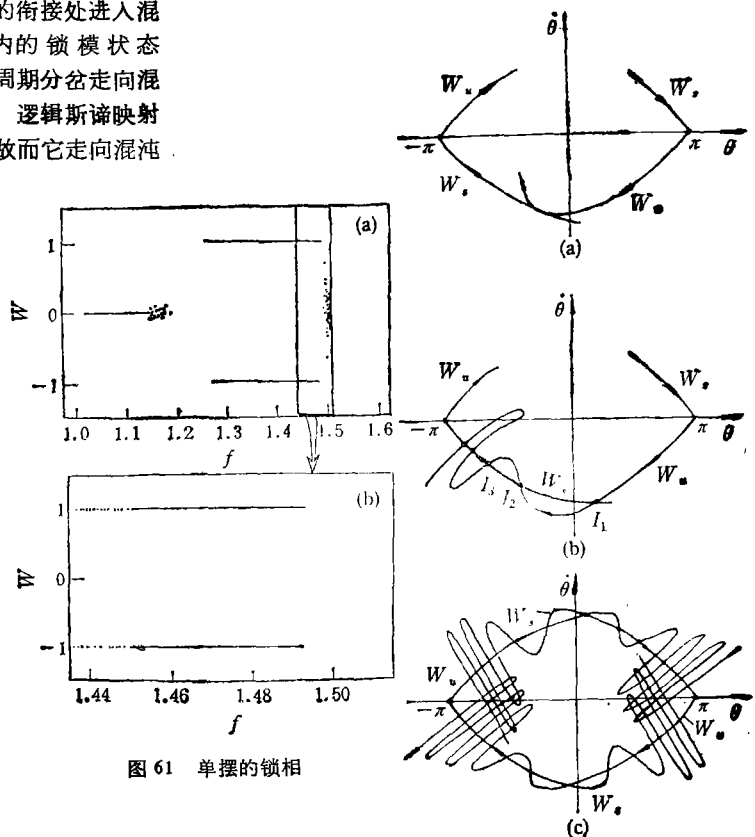


图 61 单摆的锁相

图 64 单摆庞加莱映射图中的异宿缠绕的道路更丰富多样。

最后让我们回到单摆问题上来。单摆的卷绕数 W 应定义为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n - \theta_0}{2\pi n} \right), \quad (37)$$

这里 π 是驱动循环数。图 61a 中给出卷绕数 W 和驱动振幅 f 的关系, 图 61b 是它的局部放大。从图中可以看出, 在锁相区 W 为常数, 在混沌区 W 的取值是弥散的。上表还给出单摆的运动形式随参量 f 变化情况。

§ 8. 走向理解混沌之路(三)——伸展与折叠

混沌运动的基本特点之一是初值敏感性, 伸展与折叠 (stretching and folding) 是造成初值敏感性的主要机制。前面我们已遇到伸展与折叠的例子, 那就是 § 4 里的斯梅尔线圈。如前所述, 构造斯梅尔线圈时一方面将圆环拉长一倍, 另一方面又把它盘绕两圈 (见图 28—29)。伸展的作用是把相近的相点距离拉开, 折叠的作用是把很远的相点凑到一起。总之, 伸展与折叠的作用, 是将有限大的相空间搅和掺混, 使相点的每个邻域内都有初始值相差很远的点, 同时又使一个相点初始邻域中的点分散到不同的地方去。这就产生了初值敏感性和不可预测性。

其实, 除斯梅尔线圈外, § 6 中的逻辑斯谛映射和 § 7 中的标准映射走向混沌时都包含了这种伸展与折

叠的机制。逻辑斯谛映射(30)式中迭代函数的峰值在 $x = 1/2$ 处, 峰高 $\lambda/4$ 。当 $\lambda = 4$ 时, 峰高为 1。每次迭代相当于把 x_i 取 0 到 1/2 和 1/2 到 1 的两个区间拉长了映射到 x_{i+1} 的 0 到 1 的同一区间(见图 62a)。下一次迭代再次这样做(见图 62b), 如此不断地拉长和折叠下去, 导致混沌。如果 $\lambda \leq 2$, 迭代函数的峰高小于 1/2, 第一次迭代时即将 0 到 1 的区间映射到前半区间 0 到 1/2 以内, 在此区间里迭代函数是单调增加的, 不存在折叠的问题, 从而也没有混沌。在上述两个极端情形之间, 即 $2 < \lambda < 4$, 间歇地存在着混沌区域。所以, 迭代函数的非单调性, 或者说映射的不可逆性, 或者说上述折叠效应, 是存在混沌的必要条件。上节讲标准映射时我们已指出了这种现象。

下面仍回到单摆。先看无驱动力时阻尼单摆相图 7, 着重注意鞍点附近的情况。趋向和背离此点的两对轨线分别叫做稳定流形(stable manifold) W_s 和不稳定流形(unstable manifold) W_u 。在无阻尼时相图上的鞍点本是异宿点, 从一个鞍点出发的不稳定流形连到另一鞍点的稳定流形上, 形成一根异宿轨道。有了阻尼后异宿轨道被拆断了, 两个流形如图 7, 不再相连。

现在加上周期性的驱动力。这时相空间成为三维的, 我们把二维的相图看作是庞加莱截面, 其上的映射, 即庞加莱映射, 是离散的。稳定流形和不稳定流形不再是相轨道, 需要重新定义。在无驱动力时稳定流形和不稳定流形代表鞍点附近的两个特征方向, 沿前者局部李雅普诺夫指数是最负的, 即邻点以最大的速度相互接近; 沿后者局部李雅普诺夫指数是最正的, 即邻点以最大的速度相互远离。这一性质对加驱动力后的庞加莱映射仍适用。为了构造出这离散映射的稳定流形和不稳定流形来, 在鞍点的无限小邻域内, 沿两个特征方向在它的每侧各取连续的两小段(见图 63), 找出其上各点所有过去的原象和将来的象, 构成两个不变流形。所谓“不变”, 是指对流形内的每点无论作多少次庞加莱映射或逆映射, 也跑不出这个流形去。在收缩地趋向鞍点的特征方向上构造出来的这个不变流形, 是它的稳定流形 W_s ; 在扩展地远离鞍点的特征方向上构造出来的那个不变流形, 是它的不稳定流形 W_u 。虽然两个流形看起来都是连续曲线, 但它们是由离散的映象点组成的, 并非轨线。

当驱动力的强度 f 很小时, W_s 和 W_u 的形状与无驱动力时差不多。驱动力的强度稍大时, 从一个鞍点出发的 W_s 开始与到另一鞍点的 W_u 相接触(见图 64a), 甚至相交于一系列点 I_1, I_2, I_3, \dots (见图 64b)。应当指出, 只要我们知道两个流形相交于一个点, 它们必相交于无穷多个点。这是因为此交点同时在两个流形上, 而两个流形又都是不变流形, 此交点后来所有的庞加莱映象都应同时在两个不变流形上, 即它们都是两流形的交点。这样一来, 两个鞍点(异宿点)之间的稳定

流形和不稳定流形就会如图 64c 所示那样, 无穷多次地缠结在一起。这种现象叫做异宿缠结(heteroclinic tanglement)。异宿缠结就是一种伸展与折叠的机制, 它标志着混沌的产生。

§ 9. 后记

这里只讲了耗散系统的混沌, 对于保守系统里混沌的特点(譬如那里没有吸引子)和很重要的内容(如 KAM 定理)只字未提, 本文号称以单摆为纲讲混沌, 对于单摆混沌运动的某些方面, 如吸引域边界的分形结构, 也未写进去。更不消说混沌在与化学、生物、天文等交叉的学科领域内的广泛应用了。这一方面说明有关混沌的内容很丰富, 难以用较短的篇幅来概括; 另一方面也因为混沌的理论还远不够成熟, 我们未能把材料提炼得更简捷些。

本来想从单摆入手, 尽可能按照讲物理的方式和风格来讲混沌, 但写起来不得不引用一些数学模型和术语。这是因为混沌的理论主要不是从物理, 而是从数学(还是其中的一个比较抽象的分支——拓扑学)中发展起来的。至今混沌的理论讨论的只是低维动力学系统中的问题, 这 and 实际物理世界中关心的问题(如湍流)还相差很远。然而我们从混沌理论的发展历史中看到, 抽象的思维有时是十分必要的。

美国记者詹姆斯·格莱克所著《混沌——开创新科学》一书封里的评介说, 读了该书之后, 你就决不会再再用老眼光来看世界了。从混沌的理论中我们得到了什么新观念呢? 我想至少有这样几点是比较突出的: 1. 简单方程式的解可以是很复杂的; 2. 支配复杂现象的数理模型也许是很简单的; 3. 复杂现象的规律具有某些普适性, 它们与系统的细节无关。洛伦茨提出的蝴蝶效应使中长期天气预报的理想破灭了, 但这并不完全是消极的, 从幻想中走出来面对现实, 也是好事。在混沌动力学中并不是什么都不可预测, 这要看你问什么问题了。如果问的是吸引子, 则是可以预测的。所以混沌的理论建议实验物理学家按更有意义的方式组织和展示他们的数据, 譬如吸引子及其分形维数。

现在, 以分形和混沌为标志的非线性学说引起了越来越广泛的注意, 然而这并不意味着传统物理学的方法没有用了。§ 5 中提到了“球形母牛”, 这对讨论能量和物质的收支平衡和输运过程来说未必不是一个好模型。尽管那位农场主有点大惊小怪, 这里也不见得有必要换成“分形母牛”模型。分形和混沌一类的理论告诉人们, 你应该回过头看看, 过去你的研究是在什么地方卡住了? 使人们裹足不前的往往是复杂的非线性问题。现在你已经对它们有了一些想法, 回去干吧!

作者在本文里从朱照宣教授未公开出版的《非线性力学讲义》中引用了许多精彩的例子和插图, 并且在成文的过程中和他进行了多次有益的讨论, 特此谨向他表示衷心的感谢。(完)