分形分维

肖 克 东
（四川攀枝花大学）
曾 斌
（中国第十九冶金建设公司建筑工程学校）

分形理论是非线性科学的三个组成部分（混沌、孤立子和分形）之一。世界就其本质是非线性的，线性只不过是非线性的一个特例。而大多数非线性的几何表现和几何表示是分形理论的研究对象。分形是自然界的几何学。

欧几里德几何研究的是规则的光滑图形。而分形研究不规则的不光滑图形。

分形理论的创始人，美籍法国数学家 B. B. 曼德布罗特 1975 年创造了 fractal 一词，表示破碎不堪，不规则，不光滑和分数的意思。在拉丁文中 fractal 是“碎石”的意思。

分形的基本特征是自相似，即部分与整体有着惊人的相似。自然界许多事物都呈现分形的几何特征。

海岸线的形状，在地图上是光滑的，但实际上是不规则的，测量得越精细，海岸线越长。每一段海岸线的弯曲是随机的，但不同尺度的海岸线其几何形状有着惊人的相似，就象一小块海绵的结构与一大块的结构是完全相似的一样。自然界有许多现象，它的很小部分与很大部分被缩小之后极为相似。所以分形被称为大自然的几何学。而欧几里德几何只不过是人工建构的抽象几何学。

分形理论是一门研究分形的几何特征、数量表征及其普适性的科学。它与拓扑学、概率论和随机过程都有密切的关系。而对分形理论的发展有决定影响的是计算机。

分形理论的划时代意义就在于抛弃了传统微积分学，而代之以计算机的数值解和模拟。分形是计算机时代的产物，分形理论研究不可积系统几何图形自相似性。

分形理论早已跳出了数学的范围，而深入到物理、化学、生物、生理、医学、地质地理、工程技术的各个领域，并在社会科学和哲学上也产生了深远的影响。在传统科学感到困惑的地方，在一切被认为神秘莫测的领域，分形都大显神

的研究。我们首次把直径 0.5 微米的聚苯乙烯颗粒排成周期长为 0.8 微米的线状及三角形结构，并观察到周期排列颗粒的激光衍射图样。继而，又首次把具有更高折射率的钛酸锶，二氧化钛（$n=2.6—2.9$）颗粒排成二维周期结构，并观察到相应的干涉图样。上述工作证明了在适当条件下光力能够陷住高折射率颗粒，在光学波段能够实现二维光子晶体。

由于光的相干图样决定了微粒空间结构的排列，因此要实现三维光子晶体，首先需要设计光束，使其相干形成有用的空间图样。我们用计算机通过数值模拟，首次证明了只要选择合适的光束数目及配置，多光束干涉能形成一系列有序的光强极大值三维分布，其周期长度为微米或亚微米量级，如：正立方、体心立方、面心立方、体心四方和六方密堆等，几乎所有的简单天然晶体结构都能用此方法形成。并且，我们实际利用光束干涉实验已形成了光强极值的体心长方体（图 1）、面心立方体（图 2）结构，其结果与数值模拟设计十分吻合。目前，正在研究用产生的三维强干涉光场束缚高介电常数颗粒。对于直径 1 微米的聚苯乙烯颗粒，初步实验结果表明用这种方法形成三维的颗粒结构是可能的。

有人还提出了利用静电作用在悬浮液中排列颗粒或用高电压使电流变液形成颗粒有序排列的方法，本文不作详细介绍。不论用什么方法形成的空间结构，最后还必须想办法使其固化，才能制作为实用的材料。

由于光子晶体的科学意义及潜在的应用前景，国内外越来越重视在这方面的基础理论和应用开发研究，可以预期，到本世纪末将有突破性的进展，全新的“光子半导体”及相应的“光子学器件”将逐步出现并走向实用。

通，运用自如。

美国物理学家约翰·惠勒说："明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人。"科学史家伯纳德·科恩把曼德布罗特与爱因斯坦并列。许多人把分形理论看成是 20 世纪相对论和量子力学之后的第三大科学理论，是现代科学的最前沿。

分维是分形的数量表示。由于欧几里德几何的尺度：长、宽、高无法描述不规则形体。曼德布罗特用分维数来表示分形。在欧几里德几何中，0 维表示点，一维表示线，二维表示面，三维表示空间。对欧几里德几何分数维是不可理解的。分维是 1919 年德国数学家豪斯道夫在研究奇异集合时提出的，但豪斯道夫分维数在很多情况下难以计算。1986 年，曼德布罗特将分形定义为局部以某种方式与整体相似的集，并重新讨论分维，就得出比较容易计算的分维数。

计算分维数的方法很多。现举几个简单的例子。最通常用的求维数公式有：

$$D_f = \ln K / \ln L$$

上式中 D_f 是豪斯道夫维数，K 是整体放大倍数，L 是部分放大倍数。如，考虑一个单位长的正方形，若每边放大到 2 倍，则正方形的面积放大到 $2^2 = 4$ 倍。所以，

$$D_f = \ln 4 / \ln 2 = 2 \quad \text{是二维}$$

又如：考虑一个单位立方体，边长放大到 2 倍。体积放大到 $2^3 = 8$ 倍。

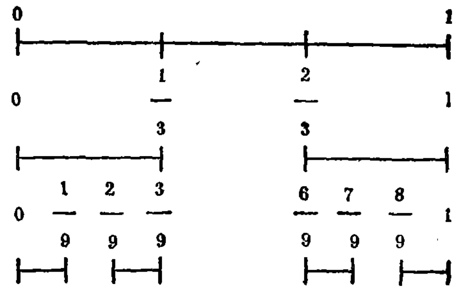
$$D_f = \ln 8 / \ln 2 = 3 \quad \text{是三维}$$

现在看康托尔点集，见表 1。取线段[0，1]，舍去中间段，保留两侧的两段，保留的各自再三等分，并舍去中间。照此操作，以至无穷。线段越来越多，长度越来越小，在极限情况下，成为一个点集。无穷个点处于不均匀分布状态。

现在求维数，其中任一段是上一级的三分之一，即放大到 3 倍，而留下的是该线段的 2 倍。所以 $K = 2$，$L = 3$，$D_f = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$

再看一个例子，谢尔宾斯基地毯，取一正方形，将它等分为 9 个小正方形，舍去中间一个小正方形。再把剩下的八个又九等分，各舍去中间一个。依此类推。求维数：从一个小方块出发，每边放大 3 倍到 $L = 3$，而整体面积放大了 $9 - 1 = 8$ 倍。所以 $K = 8$，因此 $D_f = \ln K / \ln L = \ln 8 / \ln 3 = 1.8927$、

表 1



上述两个图形的维数都是分数。图形自相似，其局部与整体是完全相似的，具有无标度性。所谓无标度性就是用照相机拍照，看不出放大或缩小的倍数。无标度就是与尺度无关。

分形分维在自然界普遍存在。有的是十分严格的，有的是近似的和统计意义上的相似。

曼德布罗特对英国海岸线的思考导致了分形概念的提出。他发现英国的海岸线是不确定的，其长度取决于测量尺度。海岸线的无标度性只能用分维来表示。他计算出：英国西海岸的分维是 1.25，南非海岸的分维是 1.02，澳大利亚海岸线的分维是 1.13。

特别值得一提的是曼德布罗特集被认为是最复杂的数学对象，但计算公式十分简单，只要对映射 $Z \to Z^2 + C$ 进行迭代即可产生许多美丽的图形。即任取一个数，自乘，再加一个初值。如此不断迭代运算。

分形分维不仅在混沌、湍流、蝴蝶效应等方面取得了很大的进展，在化学、生物学、材料力学、地震预报等方面都取得了惊人的成就，同时在社会、经济、思维和哲学等方面都有所进展。